A

LATA

ARTI

# ELEMENTI

DI

# CINEMATICA APPLICATA ALLE ARTI

ESPOSTI DA

C. I. GIULIO

AD USO DELLE SCUOLE UNIVERSITARIE, SPECIALI E TECNICHE,
E DEGLI INGEGNERI, CAPI DI OFFICINE E MACCHINISTI

---

Edizione seconda
riveduta, ampliata, corredata di note
e di un Atlante di 27 tavole.

---

TORINO
STAMPERIA REALE
1854.

Torino 10 Genn.o 1854

Ill.mo Signor Barone e Colleg.a Ch.mo

Ho l'onore di offerire alla S. V. Ill.ma un libro che altro merito non ha fuor quello di essere stato con indulgenza giudicato dalla S. V. e dal Consiglio Superiore di pubblica istruzione; piacciale gradirlo insieme co' più sentiti miei ringraziamenti, e coll' espressione rispettosa dei sensi di alta reverenza e di sincera ammirazione co' quali ho il pregio di riprotestarmi

Della S. V. Ill.ma

Dev.mo obbligat.mo Colleg.a

Giulio

# Prefazione.

La prima edizione di questi Elementi, pubblicata nel 1847, dovea, nel pensier dell'autore, formare la prima parte e quasi il vestibolo di un corso compiuto di Meccanica applicata alle arti, ad uso delle R. Scuole Tecniche recentemente instituite in Torino. A questo pensiero corrispondeva il titolo sotto il quale essi allora venivano alla luce (1).

Deluso sempre nella speranza (non mai deposta) di poter quando che sia dar corpo al pensiero medesimo, l'autore, al quale l'indulgenza con cui il pubblico volle accogliere quel primo saggio, imponea l'obbligo di emendarlo e migliorarlo quanto ci valesse, si risolve ora a darne fuori una nuova edizione sotto un nuovo titolo, e come opera compiuta per se stessa, independentemente da ogni altra che abbia a formarne il seguito od il complemento.

Questo nuovo titolo si giustifica da sè; poichè al nome di *Cinematica* (imposto dall'illustre Ampère alla scienza del moto considerato in se stesso, cioè senza rispetto alle forze che lo producono, ed ora generalmente adottato) era necessario lo aggiungere la qualificazione di *applicata alle arti*, affinchè chiaro apparisse dal titolo medesimo, come lo scopo del libro non fosse già solo la scientifica esposizione delle

(1) Sunto delle Lezioni di Meccanica applicata alle arti, dette nelle R. Scuole Tecniche di Torino l'anno 1846-47. - Parte prima.

affezioni del moto, ma sì eziandio la dimostrazione de'mezzi conosciuti di trasmetterlo e modificarlo a norma de' bisogni dell'industria. L'autore ignora se le applicazioni speciali da lui indicate di mano in mano che gliene nasceva l'opportunità, saranno dal lettore giudicate poche o soverchie; ma ei camminava tra due timori: di non giustificare abbastanza il titolo del suo libro col fare quelle applicazioni troppo scarse; oppure, col farle più copiose, di accrescerne senza bisogno la mole, uscendo dal campo della Cinematica per entrare in quello della Tecnologia.

L'insegnamento speciale della Cinematica ancor non è stato introdotto in nissuno de' nostri Collegi, nè delle nostre Università; il corso che se ne diede nel 1846-47 nelle R. Scuole tecniche di Torino, è forse il primo che ne sia stato fatto in Italia; piccolo merito, per vero dire, ma che pur l'autore si tien caro, avendo egli troppa ragion di temere che il suo insegnamento altri non ne avesse fuor quello della novità, quando non voglia tenerglisi conto dell'essersi dovuto ingegnare, rimuovendo dalle sue lezioni ogni apparato di calcoli, e riducendo tutte le dimostrazioni a semplici considerazioni di Geometria elementare, di farle accessibili agli uditori che l'indole dell'Instituto, di cui la Scuola di Meccanica applicata facea parte, chiamava in gran numero a quelle lezioni. Questa mancanza nelle Università e nei Collegi di un insegnamento speciale di Cinematica ad uso de' giovani Ingegneri, e di tutti coloro che debbon dirigere officine o lavori meccanici, non può essere che non rallenti appo di noi i progressi dell'industria. Non già che l'insegnamento delle Scuole possa mai tener luogo di quello che la pratica sola conferisce nelle officine; ma neppur questo può in tutto tener luogo di quello, e se basta al semplice artefice, esecutore de' pensamenti altrui, non basta, ciò è ben sicuro, a chi, dovendo per instituto suo governare e dirigere questa esecuzione, dee pure immaginare e suggerire i mezzi di renderla più facile, più celere e più perfetta.

Desiderando quindi l'autore di rendere, per quanto fosse in lui, più agevole e prossima l'introduzione dell'insegnamento della Cinematica nelle nostre Scuole; ed avvisando di quanto vantaggio sarebbe (acciò ingegneri, costruttori, industriali e capi d'officina avesser tutti comuni la lingua e il concetto nelle cose spettanti a Cinematica) che uno stesso libro potesse adottarsi a questo fine, così nelle Scuole industriali, come ne'Collegi e nelle Università, a malgrado della ineguale istruzione matematica che in questi diversi Instituti si impartisce, ci venne in pensiero di tentare la non facile impresa; parendogli di potersi ripromettere qualche successo col compilare il testo in guisa che si accomodasse all'intelligenza di coloro che altre cognizioni non posseggono fuor quelle della Geometria e dell'Aritmetica, od al più, e per pochi capitoli, di qualche lieve tintura di Algebra; e col riserbare, come argomento di note e di addizioni a que' luoghi che più ne abbisognassero, gli svolgimenti analitici di cui le dimostrazioni del testo fossero suscettive; sicchè quel testo servisse per tutti i lettori; queste note ed addizioni ai soli iniziati al calcolo algebrico ed infinitesimale fossero destinate.

Comune miseria di tutti coloro che in Italia prendono a trattare di cose attinenti ad arti e mestieri, è la difficoltà pressochè insuperabile di conoscere le parole tecniche, i nomi degli strumenti, degli ordigni, delle operazioni, dei prodotti di ciascun'arte. A malgrado adunque del valido e prezioso sussidio, che a lui prestò il vocabolario d'arti e mestieri del dotto quanto accurato Cav. Carena, e dell'utilità grande di cui gli furono pure il vocabolario d'Artiglieria de' signori Carbone e Arnò, e poche altre opere antiche o moderne, non può l'autore dissimulare a se stesso quanto il suo libro lasci a desiderare per questo, come per troppi altri rispetti. E tanto meno può egli ciò disconoscere, ch'ei si vide alcuna volta (disperato di poter trovare i vocaboli che gli bisognavano) ridotto alla necessità di coniarne egli di sua privata autorità, sia quando la brevità e chiarezza delle dimostrazioni imperiosamente comandavano di fuggire le lunghe perifrasi, sia quando l'analogia o l'uso speciale di un qualche meccanismo sembravano suggerire un nome conveniente. Così egli non ha dubitato di introdurre nel suo libro alcuni vocaboli non usati finora da altri nello stesso significato in cui vengono da lui usurpati, quali sono il *movente*, il *cedente*, *deferente*, *epiciclo*, *giunto*, *innesto mobile*, *morso* e pochi altri: pei quali ei chiede venia al lettore, protestandosi non solo disposto, ma impaziente di dismetter l'uso di questa moneta ossidionale, tostochè gliene venga da chichessia somministrata altra di legittimo conio.

I lettori, che vorranno darsi il fastidio di confrontare la presente edizione con quella del 1847, riconosceranno di leggieri le principali mutazioni ed aggiunte che si sono fatte nel testo, oltre a quelle contenute nelle note. Si indicheranno qui solamente le più importanti, cioè l'aggiunta di tutto il capitolo quinto (*Teoremi sul movimento di un corpo solido*), la semplificazione della dimostrazione del teorema del § 98, la costruzione delle *ruote iperboloidali per la trasmissione del movimento tra assi non concorrenti* (§ 107 a 110), la teoria generale delle *ruote atte alla trasmissione del moto per isviluppo, con ragion variabile di velocità* (addizione ai §§ 104 a 107, pagina 189), la costruzione delle ruote di *White* (§ 163 e 164), la teoria geometrica delle *ruote d'angolo* sia a *caviglie*, sia *coniche* (cap. XXVI, § 169-173), quella della *vite perpetua* (§ 175), la *descrizione approssimativa dei denti delle ruote per via di archi di circolo* (§ 181-183), i nuovi svolgimenti dati alla *teoria dei tiranti* (§ 177-179, 182-186) la descrizione del *contapassi di Breguet*, la teoria del *pantografo* e quella del *planimetro di Ernst* (cap. XXXI). E finalmente tutto il capitolo trentaduesimo, nel quale, dopo di aver reso ragione del perchè si siano ommesse in questi elementi alcune cose che altri autori han creduto dover comprendere nei loro trattati, si dimostra il teorema generale della composizione delle macchine.

Sarà lecito ancora all'autore, poichè ciò non ridonda a lode sua, ma sì del disegnatore sig. Perratone e del litografo sig. Reycends, il far notare, che quantunque si sia notabilmente accresciuto il numero delle figure, quello delle tavole si è scemato da 41 a 27 senza danno, anzi con notabil vantaggio della chiarezza, grazie alla maggior precisione e nitidezza de'disegni e della litografia.

# TRATTATO ELEMENTARE

DI

# CINEMATICA APPLICATA ALLE ARTI

## CAPITOLO PRIMO

### NOZIONI PRELIMINARI.

1. Gli animali guidati dal solo istinto trovano nelle cose create di che soddisfare immediatamente tutti i loro bisogni: quelli dell'uomo sono più numerosi e più svariati, ed egli non potrebbe soddisfarli se non fosse stato dotato da Dio nell'anima e nel corpo delle facoltà necessarie a poter modificare le produzioni naturali in modo da adattarle a' suoi usi. Il regolato esercizio di queste facoltà si chiama *industria.*

Il complesso delle operazioni richieste per adattare un oggetto naturale, o meglio una determinata specie di oggetti naturali al soddisfacimento di certi nostri determinati bisogni si chiama *arte;* ed *arte* pure si chiama il complesso delle regole, secondo le quali queste operazioni si debbono condurre. L'oggetto naturale sul quale un'arte si esercita si chiama *materia prima* o *materia grezza;* esso prende il nome di *prodotto* dopo che è stato modificato dall'arte. Così la *creta* è la materia prima sulla quale si esercita l'arte del *pentolaio;* le *stoviglie* sono i prodotti di quest'arte.

Sovente i prodotti di un'arte sono la materia grezza su cui altre arti si esercitano: il *grano*, per esempio, che è un prodotto dell'*agricoltura*, è la materia grezza dell'arte del *mugnaio;* e la *farina*, che è il prodotto dell'arte di questo, è la materia prima su cui si esercita quella del *fornaio* per farne *pane*. Sovente ancora per la varietà infinita dei climi, delle produzioni naturali e dei costumi di diversi paesi, i prodotti della industria di un popolo diventano materie prime per quella di un altro popolo: così la seta, prodotto di una delle nostre industrie più principali, va in gran parte a farsi tessere sui telai di Lione e di Spitalfields, mentre nelle nostre fabbriche si filano e s'intessono le lane dell'Ungheria, della Sassonia e dell'Australia, e i cotoni dell'Egitto e dell'America.

In più modi può l'industria modificare un oggetto materiale per farlo acconcio ai bisogni dell'uomo; essa può trasportarlo semplicemente da un luogo ad un altro, come fanno il *carrettiere* ed il *navigatore:* può cangiarne la figura esterna come fa il *falegname*, che con assi e con travi sa far mobili, macchine, abitazioni: o mutarne l'intima natura come fa il *saponaio*, che cuocendo insieme ranno ed olio ne fa il sapone che non è più nè olio, nè ranno: essa può finalmente *accelerare*, *regolare* a suo modo lo sviluppamento degli esseri dotati di vita, cioè delle piante e degli animali, come fanno l'agricoltore e l'allevator di bestiami. Quindi una prima distinzione delle arti in arti *traslocatrici*, arti *trasformatrici*, arti *trasmutatrici* ed arti *allevatrici*.

2. L'atto per cui un corpo passa da un luogo ad un altro si chiama *moto* o *movimento:* ogni cagione capace di produr moto, di modificarlo o di distruggerlo, si chiama *forza*. Lo stato poi di un corpo, che non cangia luogo nello spazio, dicesi *quiete* o *riposo*.

Ora ogni cangiamento di figura necessita un *moto* sensibile, un cangiamento di posizione in alcuna delle parti del corpo:

il falegname non può in nessun modo lavorare, senza muovere il legno sul quale lavora, e gli strumenti, per mezzo de' quali egli lavora; quindi tutte le arti *traslocatrici* e *trasformatrici* hanno per fine di produrre qualche movimento sensibile, e necessitano l'uso di qualche forza capace di produrre un tal movimento.

Ma l'arte sarebbe troppo limitata se l'uomo potesse disporre delle sole forze del suo corpo; l'industria umana ha saputo trovar modo di impiegare, per venire a' suoi fini, molte altre forze assai più potenti, che quella de' suoi muscoli. Così l'*aratore* e il *carrettiere* si servono della forza degli *animali*, il *navigante* della forza del *vento*, il *mugnaio* di quella dell'*acqua corrente* o *cadente*, quasi tutte le grandi industrie moderne di quella del *vapore*. L'uomo, gli animali, il vento, l'acqua corrente, il vapore, in quanto con la loro forza producono movimento, si dicono *motori*.

L'osservazione e la pratica sono state bastanti per apprendere e perfezionare fino a un certo segno l'uso di questi motori; ma nello stato presente dell'industria, e pel suo miglioramento avvenire è indispensabile che l'osservazione e la pratica sieno guidate e illuminate dai ragionamenti della scienza.

Quel ramo di scienza che ricerca le leggi, secondo le quali i corpi si muovono quando vengono sollecitati da date forze, si chiama *meccanica razionale;* quando essa prende a considerare i mezzi, mercè dei quali i motori si possono applicare a lavori utili all'uomo, essa prende il nome di *meccanica applicata alle arti*, o semplicemente di *meccanica applicata*. Quindi le arti traslocatrici e le arti trasformatrici si chiamano complessivamente *arti meccaniche*.

3. Le trasmutazioni intime che le arti tendono a produrre ne' corpi, debbono provenire da certi cangiamenti di posizione, cioè da certi movimenti insensibili delle minutissime particelle o *molecole*, di cui tutti i corpi sono formati;

e questi movimenti molecolari non possono avvenire senza che esistano delle cagioni o forze capaci di produrli, e che si chiamano forze di *affinità*, o forze *chimiche*. Quel ramo di scienza che ricerca il modo di operare di queste forze e gli effetti ch'esse producono, si chiama *chimica razionale;* e prende il nome di *chimica applicata* quand'essa si propone d'investigare i mezzi, mercè dei quali esse ponno esercitarsi in modo utile all'uomo. Le arti trasmutatrici, il cui retto esercizio dipende dalla giusta applicazione delle cognizioni chimiche, diconsi perciò *arti chimiche*.

L'ultimo scopo delle arti chimiche è dunque di mettere in gioco le forze di affinità, in modo che ne risultino nelle molecole de' corpi certe nuove disposizioni, per cui la natura de' corpi medesimi si trovi utilmente trasmutata. Ora le affinità non si posson. mettere in gioco senza che si siano esercitate prima sui corpi certe azioni puramente meccaniche, destinate a prepararli a quelle alterazioni chimiche cui essi sono destinati; a dividerli; a sminuzzarli, a mescerli, in modo che le loro molecole possano efficacemente operare le une sulle altre. Quindi il chimico fa uso continuo di operazioni meccaniche, quali sono scernere, lavare, rompere, fiaccare, pestare, stacciare e via discorrendo. Tutti gli strumenti ch'egli impiega ne' suoi laboratorii, le lime, le raspe, i pestelli, i cilindratoi, i vetri d'ogni maniera, i forni, i crogiuoli, e dicasi pur così di tutti gli altri, sono prodotti di arti in tutto o in parte meccaniche; ond'è da conchiudere che senza di queste le arti chimiche non potrebbero esistere per nissun modo. Ma come per una parte le azioni chimiche non si posson determinare e promuovere altrimenti che per mezzo di azioni meccaniche, così queste a vicenda non si possono il più delle volte esercitare senza l'uso di corpi e di strumenti che sono prodotti di qualche azione chimica. In quale stato sarebbe la nostra industria meccanica se non possedessimo i metalli, e particolarmente il ferro, che pure sono prodotti di arti chimiche? Noi saremmo come i selvaggi del mar del Sud, ridotti a lavorare il legno servendoci per iscuri e per ceselli di pietre dure ingegnosamente ma penosamente aguzzate. Non vi ha dunque arte chimica che non sia pure in grandissima parte arte meccanica, nè arte meccanica cui le arti chimiche non dieno efficacissimo soccorso.

4. Dopo di aver imparato dalla geometria a conoscere le varie figure de' corpi, delle superficie e delle linee che li limitano, le proprietà di queste figure, ed i principali usi loro nelle arti; dopo di aver acquistata sufficiente pratica dei metodi che si seguono per rappresentare in disegno queste figure, in modo da fare che chi vede il disegno abbia una idea tanto giusta del corpo rappresentato, quanto se avesse veduto il corpo stesso, è necessario, prima di intraprendere lo studio della meccanica applicata, il trattenersi ancora in quello di un altro ramo di scienza, al quale è stato recentemente imposto il nome di *Cinematica*, e che forma come il vincolo tra la Geometria e la Meccanica.

La Geometria facendo astrazione da tutte le proprietà dei corpi, fuorchè dalla *estensione*, li riguarda unicamente come porzioni dello spazio limitate e figurate, ed o li considera nello stato di riposo, o, se pur talora li suppone in movimento, ciò fa senza tener verun conto nè del *tempo* per cui si muovono, nè delle cagioni o forze che li mettono in movimento.

La Meccanica al contrario riguarda ogni movimento siccome effetto dell'azione esercitata sul corpo che si muove da certe determinate forze, le quali, quanto più sono gagliarde, tanto più il fanno muovere celeremente: e quindi considera nel movimento ed il tempo in cui esso si compie, e le cagioni dalle quali esso deriva.

Ma la Cinematica, tenendo come il mezzo fra queste due scienze, si propone per oggetto la ricerca delle affezioni del movimento considerato in se medesimo, tenendo conto bensì del tempo in cui esso si compie, ma facendo astrazione dalle forze dalle quali è prodotto. Come introduzione alla meccanica applicata la Cinematica indaga più particolarmente in qual modo il movimento si modifichi o si trasformi nel trasmettersi da un corpo all'altro, e quindi in quali modi, per mezzo di quei congegni ai quali si dà il nome di *macchine*, si possa trasformare una data specie qualunque di moto, in un moto di specie differente, necessario o più atto del primo a poter eseguire una operazione qualsiasi di arte meccanica (1).

(1) Ognun comprende quanto sia difficile il dare un giusto concetto ed una esatta definizione di qualsivoglia scienza a chi ancora non ne conosca almeno i primi elementi. Il lettore non vorrà quindi insistere sulle nozioni esposte in questo primo capitolo, sulle quali gli sarà uopo ritornare, dopochè avrà almeno in gran parte studiati i capitoli seguenti.

## CAPITOLO SECONDO

### DISTINZIONE DELLE VARIE SPECIE DI MOTO RISPETTO ALLE LINEE DESCRITTE.

5. Un corpo considerato in quanto esso si muove od è capace di muoversi si chiama un *mobile;* per procedere per gradi noi cominceremo a considerare il movimento di un corpo le cui dimensioni sieno tutte piccolissime; di un corpo cioè che possa senza errore riguardarsi come tutto raccolto in un punto solo, quale si può ammettere che sia un granello d'arena, un seme di senapa o di papavero: un tal corpo dicesi dai meccanici *punto fisico, particella, punto od elemento materiale.*

Un punto materiale non può trasferirsi da un luogo ad un altro, senza passare per una infinità di posizioni intermedie; tutte queste posizioni nelle quali il mobile passa e non si ferma, considerate insieme formano una linea continua, che si stende dalla prima all'ultima posizione del mobile, cioè dal suo punto di partenza al suo punto d'arrivo, e che si chiama *traiettoria del movimento.* Questa traiettoria può essere una linea retta, come quando una *palla* percossa dalla *stecca* rotola sul *prato* del *biliardo;* e può essere una linea curva, come quando al giuoco del *pallone* noi veggiam questo partire cacciato dall'urto del *bracciale*, alzarsi descrivendo un certo arco, e poi similmente ridiscendere per ricevere dal giuocatore opposto una novella percossa. — Il moto nel primo caso si dice *rettilineo*, nel secondo *curvilineo;* e tante sono le specie di moto curvilineo, quante sono le specie di curve che un punto può descrivere, cioè infinite; così esso dirassi *moto circolare, elittico, parabolico* ecc., secondochè la sua traiettoria sarà un circolo, un'ellisse, una parabola ecc.

Quando un punto descrive una linea retta, la posizione di questa retta determina la *direzione* del movimento; quindi diciamo che un punto si muove con direzione *verticale*, *orizontale* o *inclinata*, quand'esso descrive una retta verticale, orizontale od inclinata. Secondo ciascuna retta poi il moto può farsi per due *versi* opposti; così se un punto va da oriente verso occidente diremo che esso si muove per un *verso*, e se cammina da occidente ad oriente diremo che si muove pel verso *contrario;* due punti che corrono entrambi d'oriente in occidente vanno pel medesimo verso; due punti che camminano l'uno d'oriente in occidente, l'altro d'occidente in oriente, vanno per versi contrarii.

Ogni curva si confonde sensibilmente con un poligono inscritto o circoscritto, formato di lati retti e piccolissimi; ciascun lato di questo poligono, prolungato indefinitamente dalla parte verso la quale il mobile cammina, indica la direzione del movimento per quell'istante in cui il mobile si trova sopra quel lato. Dunque nel moto rettilineo la direzione è sempre la medesima, nel moto curvilineo essa varia continuamente, ed in ciascun istante essa è determinata dalla tangente condotta a quel punto della curva per cui il mobile passa in quell'istante (1).

(1) La direzione del moto di un punto è determinata graficamente quando si conoscono le proiezioni fatte sovra due piani non paralleli, della retta descritta dal mobile, o della tangente alla curva da esso percorsa. Analiticamente determinasi questa direzione per mezzo degli angoli che essa fa con tre assi fissi presi ad arbitrio, cioè con tre rette parallele rispettivamente a questi assi, e condotte pel mobile dalla parte verso la quale si contano le coordinate positive. Quando questi assi sono tra di loro ortogonali, detti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i tre angoli sopradetti, sempre sussiste tra di essi la relazione

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

mercè della quale, dati due dei tre angoli, il terzo è pure conosciuto purchè si sappia se esso è minore oppure maggiore di un angolo retto, cioè se il suo coseno è quantità positiva oppure negativa. Se il moto è curvilineo, dette $x$, $y$, $z$ le coordinate di un punto della traiettoria, ed $s$ il corrispondente valore dell'arco, si avranno, nell'istante in cui il mobile passerà per quel punto

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

6. Sia che un punto si muova in linea retta od in linea curva, può avvenire ch'esso vada sempre per lo stesso verso, oppure che vada ora per un verso, ed ora pel verso contrario; così, per esempio, le *lancette* degli orologi vanno sempre pel medesimo verso, cioè da sinistra a destra, e la *spuola* del tessitore va ora da destra a sinistra, ora da sinistra a destra. Nel primo caso il moto si dice *continuo*, e nel secondo caso *alternativo*. Egli è d'altronde evidente che in nissuno de' casi che occorre di considerare nell'applicazione della meccanica alle arti, il moto non può continuarsi indefinitamente in linea retta e pel medesimo verso, poichè la retta effettivamente descritta ha necessariamente una lunghezza definita. Lo stesso si dee dire quando la linea secondo la quale il punto si muove è una curva aperta, come la parabola. Ma quando la traiettoria è una curva chiusa o rientrante, come il circolo e l'ellisse, il moto si può continuare indefinitamente per lo stesso verso, tornando indefinitamente il mobile a ripassare per le medesime posizioni; il moto dicesi allora *rivolutivo*, e la traiettoria prende il nome di *orbita*. Le *orbite* che i pianeti descrivono intorno al sole sono ellissi pochissimo allungate, di cui il sole occupa un foco.

Ecco un'altra distinzione importante: nelle macchine vi ha de' pezzi che si muovono costantemente, senza posa, finchè la macchina è in azione, come le lancette dell'orologio, come le macine del molino; ve ne ha degli altri che dopo essersi mossi per un tempo più o men lungo interrompono il loro moto e stanno per qualche tempo in riposo, per entrar poi novellamente in moto con perpetua vicenda; e ne abbiamo un esempio nella *soneria* degli orologi, che si mette in moto soltanto alla fine d'ogni ora, o d'ogni mezza, o d'ogni quarto d'ora, e generalmente in tutte le macchine a *scatto*. Il moto può dunque essere *permanente* oppure *intermittente*.

7. In tutto ciò che precede noi abbiamo sempre considerato il moto di un corpo di dimensioni insensibili, o tanto

piccole, che si potesse senza error notabile considerare come tutto raccolto in un solo punto geometrico. Quando il corpo avrà dimensioni sensibili, il suo moto non si potrà dir conosciuto, se non si conoscerà quello di ciascuno de' suoi punti: ma vi ha dei casi, che sono quelli che più frequentemente occorrono nelle arti, ne' quali, conosciuto il movimento di un punto solo di un corpo solido e rigido, si conosce pur quello di qualsivoglia altro punto di esso, e quindi anche il moto di tutto il corpo.

Il primo caso è quello in cui tutti i punti del corpo descrivono linee rette tra di loro parallele, come quando una *treggia* o *lesina* si strascina sopra una strada dritta; questa specie di moto, la più semplice che possa avvenire in un corpo esteso, chiamasi *moto progressivo* e *rettilineo*. Il moto sarà poi *progressivo*, ma *curvilineo* quando tutti i punti del corpo descriveranno linee curve tutte perfettamente eguali tra di loro, la qual cosa non potrà mai avvenire, salvo che il corpo si muova in modo tale, che ciascuna delle sue facce sia sempre volta precisamente verso la stessa parte di cielo. Sopra una tavola orizzontale posiamo un parallelepipedo rettangolo, o un dado, in modo che una delle sue facce guardi all'ingiù posando sulla tavola, un'altra all'insù, e le altre quattro, che saranno in piani verticali, guardino una a levante, l'altra a meriggio, la terza a ponente, la quarta a tramontana. Facciamo poi muovere con la mano il dado, in módo che la sua fascia inferiore combaci sempre perfettamente con la tavola, e che le sue quattro faccie verticali continuino sempre a star voltate direttamente verso i quattro punti cardinali. Qualunque sia la curva che faremo descrivere al dado, noi gli avremo fatto prendere un moto *progressivo*. Ciò che in questo esempio si dice di un parallelepipedo rettangolo, facilmente si potrà trasferire ad un altro corpo, qualunque sia la sua figura.

Un altro caso, in cui si conosce il movimento di tutti i punti del mobile, quando è dato quello di uno solo de' suoi punti, si ha in un corpo ritenuto da un asse fisso intorno al quale può girare, ma che gli impedisce ogn'altro movimento; tali sono la *mola* dell'arrotino e i pezzi che si lavorano al *tornio*, che girano e quella e questi intorno ad assi orizontali; tali sono pure la *macina corrente* del mulino e la *ruota del vasaio* che girano intorno ad assi verticali. In tutti questi esempli è facile comprendere che ciaschedun punto del corpo girante descrive una circonferenza di circolo contenuta in un piano perpendicolare all'asse, e di raggio eguale alla lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto medesimo sull'asse. Un tal moto dicesi *moto rotatorio*, ed è quello di cui fanno più frequente uso le arti.

8. Si dimostrerà in un altro capitolo, che ogni movimento di un corpo solido può sempre riguardarsi come risultante dalla coesistenza nel corpo stesso di due movimenti, l'uno progressivo, l'altro rotatorio; od in altri termini, ch'esso può sempre intendersi scomposto in due moti, l'uno di progressione, l'altro di rotazione. Ma possiamo intanto osservare fin d'ora, che in alcuni casi più semplici questa scomposizione del movimento si presenta spontanea al nostro spirito. Così il movimento delle ruote di un carro risulta manifestamente dalla coesistenza di un moto progressivo secondo la direzione della strada percorsa dal carro, e di un moto di rotazione intorno al fuso della *sala;* così ancora il movimento di una *vite* entro alla sua *chiocciola* o di un *rampinetto* entro al *turacciolo*, risulta da un doppio moto di progressione secondo l'asse della vite o del rampinetto, e di rotazione intorno all'asse medesimo.

Egualmente facile è lo scorgere che talvolta il movimento di un corpo si può riguardare come risultato di due movimenti rotatorii simultaneamente fatti dal corpo intorno a due assi differenti: così ne' mulini da pestare il *gesso* o le *noci*, da dirompere la *canapa* ecc. (mulini simili a quello che ora si è vantaggiosamente sostituito alla *gramola* nell'arte del vermicellaio), la *macina ritta* cioè verticale gira intorno di un asse orizzontale, nel mentre quest'asse è esso medesimo condotto in giro intorno di un albero verticale impernato nel centro del *pilone* o *piatto* che contiene la materia sottoposta all'azione della macina (1).

Noi avremo più tardi occasione di esaminare la forma e le proprietà delle curve descritte da tutti i punti di un corpo che muovasi a guisa di ruota o di vite, e di indicare le innumerevoli applicazioni che di queste curve si sono fatte in tutti i lavori meccanici.

(1) Familiare a tutte le persone colte è l'idea del doppio movimento della terra, la quale, mentre in un anno descrive intorno al sole una orbita che può riguardarsi come una circonferenza di circolo di 153383970 chilometri di raggio, compie ogni giorno una intiera rotazione intorno al proprio *asse*, cioè intorno ad una retta che passa pel centro della terra, e ne incontra la superficie in due punti che diconsi *poli*. Ciascun punto della superficie terrestre descrive dunque ogni giorno una circonferenza di circolo in un piano perpendicolare a quest'asse: questi circoli diconsi *paralleli*, e sono manifestamente tanto minori, quanto più vicini ai poli. I punti della superficie terrestre equidistanti dai due poli descrivono un gran circolo che chiamasi *equatore*, ed il cui raggio è di 6378481$^{m}$. Il doppio movimento della terra differisce da quello della macina da pestare in ciò, che mentre l'asse di rotazione della macina cangia continuamente direzione, l'asse della terra all'incontro si mantiene sempre parallelo a se stesso, astrazione fatta da certi piccoli movimenti di cui non è qui luogo di far parola.

# CAPITOLO TERZO

## DISTINZIONE DELLE VARIE SPECIE DI MOTO RISPETTO ALLA VELOCITÀ.

9. Nel capitolo precedente noi abbiam ragionato di quelle varietà che nascono nel movimento dalla varietà delle linee secondo le quali il mobile può camminare, dal verso per cui cammina, e dalla permanenza o dalle interruzioni del suo camminare. Nel capitolo presente faremo entrare in considerazione anche il *tempo* che il mobile impiega a passare da una ad altra posizione.

La durata di un giorno, cioè l'intervallo di tempo che corre tra due passaggi successivi del sole pel meridiano dello stesso luogo, ossia da mezzogiorno a mezzogiorno, o da mezzanotte a mezzanotte, è l'unità di tempo la più naturale e la più conveniente che possiamo scegliere, purchè essa venga divisa e suddivisa in parti eguali e tanto piccole, che possano comodamente servire per la misura di ogni menomo intervallo sensibile di tempo: egli è ben noto a tutti che il giorno si suol dividere in ventiquattro ore, l'ora in sessanta minuti primi, il minuto primo in sessanta minuti secondi: con questa divisione sessagesimale il giorno è dunque composto di 86400 minuti secondi. Per indicare che un numero esprime ore, minuti o secondi, si segna a destra e al disopra di esso uno zero, oppure uno o due accenti: così scrivendo $8^o, 23', 54''$ si vogliono significare otto ore, ventitre minuti e cinquantaquattro secondi.

È stata pure proposta, e si usa qualche volta, un'altra maniera di dividere il giorno, più conforme al nostro sistema decimale di numerazione, chiamando *ora* la decima parte del giorno, *minuto* la centesima parte di un'ora, e *secondo* la centesima parte di un minuto. Con questa divisione centesimale il giorno sarebbe di 100000 secondi: quindi 100000 secondi centesimali equivalgono ad 86400 secondi sessagesimali, ed un minuto centesimale equivale a 0,864, ossia a $\frac{108}{125}$ di un minuto secondo sessagesimale.

La durata del giorno *vero*, *naturale* od *apparente*, cioè dell'intervallo tra' due passaggi del sole pel meridiano, varia alquanto da una stagione all'altra dell'anno; quindi è che per aver una misura del tempo perfettamente uniforme, cioè sempre eguale, invece del giorno *vero* si dee prendere per unità il giorno *medio*, la cui durata si ottiene dividendo la durata complessiva di tutti i giorni dell'anno, pel numero de' giorni medesimi. Così dunque il tempo *vero* è quello che viene indicato dagli *orologi* o *quadranti solari*, il tempo medio è quello che sarebbe segnato da un *orologio a ruote* perfettamente costrutto e regolato.

Il parlar qui degli stromenti *cronometrici*, cioè che servono alla misura del tempo, o degli orologi, sarebbe prematuro. Supporrò dunque che noi possediamo un orologio ben regolato, per mezzo del quale possiamo misurare con tutta accuratezza gl'intervalli grandi o piccoli di tempo, che ci occorrerà di dover confrontare. Aggiungerò solo, perchè questa notizia può giovare a chi non possiede un orologio a minuti secondi, che sospendendo una piccola palla di metallo, come una palla da fucile, all'estremità di un filo sottilissimo, in modo che la lunghezza del filo, o meglio la distanza tra il centro della palla e il punto fisso al quale il filo è attaccato, sia di novecento novantatre millimetri e mezzo, e facendo poi dondolare liberamente questa palla a destra e a sinistra della verticale, essa impiegherà precisamente un minuto secondo sessagesimale in ciascuna andata e in ciascuna venuta, o come dicono i meccanici in ciascuna *oscillazione*. Noi avremo fatto così un *pendolo a minuti secondi sessagesimali*. Se volessimo che il pendolo battesse i minuti secondi centesimali, la sua lunghezza dovrebbe essere di 741 millimetri e $\frac{6}{10}$.

10. La lunghezza della linea retta o curva descritta in un dato tempo da un punto che si muove, chiamasi lo *spazio* percorso in questo tempo. Se due punti muovendosi per egual tempo percorrono spazi diseguali, quello che percorre spazio maggiore si dirà che si muove più *presto* o più *velocemente*, o che è più *veloce* o che ha *maggior velocità*, e l'altro si dirà che si muove più *adagio* o più *lentamente*, o che è più *lento*, più *tardo*, o finalmente che ha *meno velocità*. Se poi avremo osservato che due punti impiegano tempi diseguali a percorrere lo stesso spazio, è chiaro che il più *veloce*, quello che ha velocità maggiore, è quello che impiega meno tempo. Quindi, esprimendoci con linguaggio geometrico, noi possiamo dire, che

1.° Se due punti descrivono spazi diseguali in tempi eguali, le loro velocità sono direttamente proporzionali agli spazi percorsi.

2.° Se due punti impiegano tempi diseguali a percorrere spazi eguali, le loro velocità sono inversamente proporzionali ai tempi impiegati.

E per conseguenza

3.° La velocità di un punto è direttamente proporzionale allo spazio percorso, ed inversamente proporzionale al tempo impiegato a percorrerlo; oppure la velocità sta in ragion diretta degli spazi, ed in ragion inversa dei tempi.

La prima di queste tre proposizioni ci dà subito il mezzo di confrontare tra di loro le velocità di due punti. Infatti sapendo per esempio che il primo percorre 50 metri in 10″ e l'altro 15 metri in 5″, ci sarà facile scoprire che in un minuto secondo il primo percorre 5 metri e l'altro 3 metri. Le velocità di questi due punti staranno adunque tra loro come 5 al 3, cioè la velocità del primo sarà eguale ad una volta e due terzi quella del secondo.

Quindi si vede che per confrontare la velocità di due punti basta cercare qual è lo spazio che ciascuno di essi descrive in un minuto secondo; e questo spazio si trova dividendo lo spazio intero descritto in qualunque tempo pel numero di minuti secondi contenuti in questo tempo. Epperò d'or innanzi noi chiameremo *velocità* di un punto, la lunghezza dello spazio che questo punto descrive in una unità di tempo: e prendendo per unità di spazio il metro, e per unità di tempo il minuto secondo, stabiliremo la regola seguente:

*Per trovare la velocità con cui un punto si muove, bisogna dividere il numero dei metri da esso percorsi in qualsivoglia tempo, pel numero di minuti secondi contenuti in questo tempo* (1).

(1) La proposizione enunciata al N.° 3.°, e tutto ciò che vien dietro facilmente si deducono dai due principii enunciati sotto i N.i 1.° e 2.°

Siano infatti due punti, dei quali il primo percorra lo spazio $s$ nel tempo $t$, ed il secondo lo spazio $S$ nel tempo $T$; e dicansi $u$, $U$ le velocità di questi due punti rispettivamente. Per confrontare tra di loro queste due velocità consideriamo ancora un terzo punto il quale nel tempo $t$ percorra lo spazio $S$, e dicasi $V$ la sua velocità. Il primo punto ed il terzo descrivendo gli spazii diseguali $s$, $S$ nel medesimo tempo $t$, avremo in virtù del N.° 1.°:

$$u : V :: s : S \; ; \qquad (1)$$

il secondo punto ed il terzo, descrivendo lo stesso spazio $S$ ne' tempi differenti $T$, $t$, avrem pure in virtù del N.° 2.°:

$$V : U :: T : t \qquad (2)$$

Moltiplicando termine a termine queste due proporzioni, e sopprimendo nei due termini della prima ragione il fattor comune $V$, ne viene

$$u : U :: s\,T : S\,t \text{, ossia}$$

$$u : U :: \frac{s}{t} : \frac{S}{T} \qquad (3)$$

che è l'espressione algebrica della proposizione contenuta nel N.° 3.°

Se ora supponiamo, che $S$ e $T$ siano rispettivamente eguali alla unità di spazio (per esempio al *metro*) ed alla unità di tempo (p. e. al minuto secondo), e se facciamo pure $U = 1$, troviamo

$$u = \frac{s}{t} \,,$$

onde conchiudiamo che presa per unità la velocità di un punto che percorra lo spazio *uno* nel tempo *uno*, la velocità di qualunque altro punto avrà per misura lo spazio da esso descritto nella unità di tempo.

11. La natura e l'arte ci presentano esempi di velocità impercettibili, ed altri di velocità così grandi da confondere la nostra immaginazione; molte sostanze ridotte in polveri sottilissime e sospese nell'acqua impiegano più ore od anche più giorni a deporsi in fondo al vaso in cui sono contenute: la velocità di questo movimento non eccede alcuni centesimi di millimetro per minuto secondo, mentre la luce non impiegando più di 8 minuti primi e un quarto (o più esattamente 493″,2) a venir dal sole fino alla terra, cioè a percorrere uno spazio di cento e cinquantatre milioni di chilometri, la sua velocità è di trecento e undici milioni di metri (126000 miglia di Piemonte) per minuto secondo.

La velocità dell'elettricità è forse ancora maggiore, e l'industria diretta dalla scienza ha saputo giovarsene per costruire quei mirabili *telegrafi elettrici*, per mezzo dei quali il pensiero può volare da una parte all'altra della terra come portato sulle ali del fulmine. Si troverà alla fine di questo capitolo una tavola di molte velocità interessanti a conoscersi.

12. La regola che abbiamo insegnata per determinare la velocità del movimento quando si conosce lo spazio percorso in un certo tempo, suppone che questa velocità non cangi da un istante all'altro, ch'essa non cresca e non diminuisca, od in altre parole che il mobile in eguali e successivi intervalli di tempo descriva spazi eguali. Quando ciò ha luogo il movimento si chiama *equabile* od *uniforme*; tale è il movimento dell'acqua in un lungo canale perfettamente regolare e tutto di eguale declivio, e tale si procura che sia il moto di quasi tutte le macchine adoprate nelle manifatture.

Il moto equabile di un punto è perfettamente conosciuto, quando si conoscono la sua direzione e la sua velocità. Rappresenti AB (*tav.* 1, *fig.* 1) quella linea che si vuol prendere per unità di spazio o di lunghezza, per esempio un metro; sia HI la linea secondo la quale il punto H si muove da sinistra a destra con velocità data, per esempio di 4 metri;

partendo dal punto H portiamo verso destra quattro volte la lunghezza AB che giungerà fino in I; potremo dire allora che la retta definita HI rappresenta in grandezza e direzione la velocità del movimento di H, e ci fa pienamente conoscere questo movimento.

13. Ma egli avviene sovente che nella continuazione del moto la velocità va continuamente crescendo, o continuamente calando, cosicchè gli spazi successivamente descritti in eguali intervalli di tempo, divengono ognor più grandi od ognor più piccoli. Se per esempio, noi lascieremo cadere una grossa palla di ferro da una grande altezza, osserveremo che nel primo minuto secondo della sua caduta essa descriverà uno spazio di un po' meno che cinque metri (esattamente di $4^m,903$ astrazion fatta della resistenza dell'aria); ma lo spazio descritto nel minuto secondo seguente sarà tre volte maggiore, cioè quasi di 15 metri ($14^m,709$), e nel terzo minuto secondo lo spazio percorso sarà di 25 metri circa ($24^m,514$); la velocità o celerità del corpo cadente va dunque continuamente crescendo, e per ciò il moto dicesi *accelerato*. Al contrario, se noi getteremo con tutta la forza del braccio una palla da gioco sopra il suolo orizzontale di un viale, quanto si voglia meglio spianato, essa percorrerà nel primo minuto secondo uno spazio che potrà essere per esempio di sei metri; ma a motivo del fregamento sul piano e della resistenza dell'aria, nel minuto secondo seguente la palla descriverà uno spazio minore, poniamo di soli cinque metri e mezzo; nel terzo minuto secondo lo spazio descritto sarà di cinque metri soltanto, ed alla fine di dodici secondi e mezzo la palla si arresterà dopo di aver percorso in tutto una distanza di poco più che trentanove metri. In questo secondo esempio la velocità va continuamente diminuendo, il moto si rallenta, si ritarda continuamente, e dicesi perciò *moto ritardato*. Noi ci tratterremo altre volte più lungamente sopra queste due specie di movimento, che si chiamano con nome comune

movimenti *varii* o *variati;* ma il lettore già comprende fin d'ora che possono esistere infinite specie di moto vario, potendo la velocità del movimento variare da un istante all'altro secondo una infinità di leggi differenti; nei due esempli che abbiamo addotti, cioè in quello di un corpo pesante liberamente cadente, ed in quello di una palla che ruzzola sovra un piano orizzontale, se si fa astrazione dall'effetto della resistenza dell'aria, la sperienza dimostra che la velocità del movimento cresce o diminuisce proporzionalmente al tempo, cioè riceve sempre eguali aumenti od eguali diminuzioni, in eguali e successivi aumenti di tempo. In questi ed altri simili casi il moto dicesi *equabilmente accelerato*, ed *equabilmente ritardato*.

14. Nel moto progressivo di un corpo di qualsivoglia grandezza, comunque varii da un istante all'altro la velocità con cui il corpo si avanza, tutti i punti di esso descrivono linee eguali nello stesso tempo; per conseguenza in ciascuno istante essi hanno tutti la medesima velocità (V. capitolo secondo). Ma così non avviene nel moto rotatorio; noi abbiamo veduto infatti che in questa specie di moto ciascun punto del corpo descrive la circonferenza di un circolo che ha per raggio la distanza di quel punto dall'asse; ora le circonferenze dei circoli essendo proporzionali ai loro raggi, ne segue che mentre un punto situato alla distanza di un decimetro dall'asse percorrerà una circonferenza intera cioè uno spazio di $\frac{44}{7}$ di un decimetro, un punto posto a distanza dieci volte maggiore dall'asse descriverà esso pure una circonferenza, ma questa sarà dieci volte maggiore della prima; essa sarà dunque lunga $\frac{44}{7}$ di un metro ossia 6 metri e $\frac{4}{7}$.

Nel moto rotatorio adunque la velocità di ciascun punto è proporzionale alla sua distanza dall'asse; cioè la velocità di un punto situato alla distanza di due, di tre, di quattro unità, è doppia, tripla o quadrupla della velocità di un punto situato alla distanza di un'unità sola dall'asse. Quest'ultima velocità si chiama la *velocità angolare* del movimento; quindi allorchè si conoscerà la velocità angolare con cui un corpo gira intorno un asse fisso, la velocità assoluta di un punto qualunque si otterrà moltiplicando la velocità angolare per la distanza di questo punto dall'asse. E viceversa conoscendo la velocità di un punto e la sua distanza dall'asse, la *velocità angolare* del movimento si troverà dividendo la velocità assoluta per la distanza. È facile il vedere che la velocità angolare è proporzionale al numero dei giri che il corpo fa in un dato tempo, per esempio in un minuto secondo; questo numero di giri infatti si trova dividendo la velocità angolare per la ragione costante della circonferenza al raggio, cioè per $\frac{44}{7}$ prossimamente, o ciò che torna allo stesso moltiplicando la velocità angolare per $\frac{7}{44}$ (1).

(1) Sia $t$ la durata di una rivoluzione intiera del corpo, e ponsiansi $r'$, $r''$, $r'''$..... le distanze di diversi punti del corpo dall'asse di rotazione: gli spazii descritti da questi punti nel tempo $t$ saranno $2\pi r'$, $2\pi r''$, $2\pi r'''$....., esprimendo $\pi$ il rapporto della circonferenza al diametro. Date dunque le velocità assolute $u'$, $u''$, $u'''$..... dei medesimi punti, si avranno

$$u' = \frac{2\pi r'}{t}, \quad u'' = \frac{2\pi r''}{t}, \quad u''' = \frac{2\pi r'''}{t} \ldots\ldots$$

e per conseguenza

$$u' : u'' : u''' \ldots\ldots :: r' : r'' : r''' \ldots\ldots$$

ossia
$$\frac{u'}{r'} = \frac{u''}{r''} = \frac{u'''}{r'''} \ldots\ldots$$

Il quoziente che si ottiene dividendo la velocità assoluta di qualunque punto del corpo per la distanza di esso punto dall'asse, quoziente che

Egli è appena necessario di avvertire, che il moto rotatorio di un corpo si dirà *equabile* oppure *vario*, secondochè la sua velocità angolare si manterrà sempre la medesima, oppure andrà variando da un istante all'altro.

è lo stesso per tutti i punti del corpo, chiamasi la *velocità angolare* del movimento, ed è manifestamente eguale alla velocità assoluta dei punti che sono alla unità di distanza dall'asse. Detta $\omega$ questa velocità angolare, la velocità assoluta di un punto la cui distanza dall'asse sia $r$, sarà $= r\,\omega$.

È pur manifesto, che rappresentando sempre $t$ la durata di un'intiera rivoluzione del corpo, sarà la velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{t}$; ed ancora, che detto $N$ il numero intero o frazionario dei giri fatti dal corpo in una unità di tempo, sarà $t = \frac{1}{N}$ e per conseguenza $\omega = 2\pi N$.

# TAVOLA

## DELLE VELOCITÀ DI DIVERSI MOVIMENTI.

### *(Capitolo terzo)*

| | Metri per $1''$ |
|---|---|
| *Velocità della luce.* — La luce impiega 8 minuti, 13 secondi e un quinto di secondo a venire dal sole alla terra; questa distanza essendo di 62120509 miglia di Piemonte, ossia di 153383970 chilometri, la velocità della luce è di 125954 miglia piemontesi per minuto secondo, o di .................... | 310998000 |
| Velocità media del centro della terra nel suo moto annuo intorno al sole — 12 miglia e $\frac{1}{3}$ di Piemonte, o meglio... | 30538, 5 |
| Velocità del moto diurno all'equatore .... | 465, 1 |
| — del moto diurno a Torino...... | 329 |
| — del suono nell'aria a temperatura del ghiaccio fondente........ | 333 |
| Velocità iniziale delle palle da fucile di fanteria.................... | 570 |
| — iniziale delle palle da moschettone di cavalleria................ | 315 |
| — iniziale delle palle da pistola di cavalleria .................. | 250 |
| — iniziale delle palle da cannone.. | da $540^{m}$ a $630^{m}$ |
| — di un vento de' più terribili .... | $45^{m}$ |
| — di un vento fortissimo........ | $15^{m}$ |
| — — debole ........... | $2^{m}$ |
| — di un cavallo di corsa......... | da 12 a $15^{m}$ |

| | Metri per 1″ |
|---|---|
| Velocità della cavalleria al galoppo ..... | $5^m,3$ |
| — — al trotto ....... | $3^m,3$ |
| — — al passo ....... | $1^m,66$ |
| — delle diligenze e vetture pubbliche | da $3^m$ a $4^m$ |
| — delle locomotive sulle strade ferrate orizzontali ............ | da $4^m$ fino a $30^m$ |
| — de' battelli a vapore........... | da $3^m$ a $7^m$ |
| — della fanteria al passo di carica | $1^m,66$ |
| — — accelerato | 1,10 |
| — — ordinario. | 0,80 |
| — media dell'acqua ne' fiumi...... | da $0^m,5$ a $2^m,0$ |
| — dell'estremità della lancetta dei minuti, supponendola della lunghezza di 20 millimetri ...... | $0^m,000035$ |
| — dell'estremità della lancetta delle ore, supponendola della lunghezza di 15 millimetri ...... | $0^m,0000022$ |

# CAPITOLO QUARTO

## DEL MOTO COMUNE E DEL MOTO PROPRIO, DEL MOTO ASSOLUTO E DEL MOTO RELATIVO, DELLA COMPOSIZIONE E DELLA SCOMPOSIZIONE DEL MOTO.

15. Rappresentiamoci col pensiero una nave, la quale con moto equabile e rettilineo scorra da levante a ponente sulla superficie tranquilla del mare o di un lago, e supponiamo che la sua velocità sia di cinque metri per minuto secondo. Un uomo seduto in qualunque parte del vascello parteciperà al moto di esso, cioè si muoverà egli pure equabilmente in linea retta da levante a ponente e con velocità di cinque metri; questo moto sarà dunque *comune* alla nave ed all'uomo. Supponiamo adesso che l'uomo prenda a camminare sulla nave andando da levante verso ponente, cioè pel medesimo verso di essa, e ne percorra in quindici secondi la lunghezza, che fingeremo di quindici metri; oltre al moto che gli è comune con la nave egli avrà allora un moto *proprio*, in virtù del quale egli percorrerà sulla nave stessa, in ogni minuto secondo, una distanza di un metro; così, in ogni minuto secondo, egli sarà trasportato innanzi di cinque metri insieme con la nave, e si avanzerà di più di un metro pel suo moto proprio; egli avanzerà dunque in tutto di sei metri per minuto secondo, cioè avrà una velocità *assoluta* eguale alla somma della velocità comune e della sua velocità propria.

Che se, invece di camminare da levante a ponente, l'uomo camminasse da ponente a levante, cioè pel verso contrario a quello della nave, mentre questa lo porta innanzi di cinque metri, il suo moto proprio lo riporterebbe indietro di un metro, e il suo cangiamento di luogo assoluto sarebbe di quattro metri soltanto; epperò la sua velocità assoluta sarebbe di quattro metri per minuto secondo, cioè eguale alla differenza tra la velocità del moto comune e quella del moto proprio. Se poi queste due velocità fossero eguali, e l'uom camminasse sulla nave con velocità di cinque metri, allora tanto egli avanzerebbe pel moto comune, quanto indietreggerebbe pel moto proprio, e l'effetto di questo doppio movimento, sarebbe che l'uomo non cangerebbe luogo assoluto, cioè starebbe fermo.

Da questo solo esempio noi già possiamo dedurre queste tre conseguenze:

1.° Quando un corpo è animato nello stesso tempo da due movimenti diretti dalla stessa parte secondo la medesima retta, la sua velocità assoluta è eguale alla somma delle velocità dei due movimenti.

2.° Quando un corpo è animato da due movimenti diretti in parti contrarie, la sua velocità assoluta è eguale alla differenza delle velocità dei due movimenti e diretta pel verso della velocità maggiore.

3.° Quando un corpo è animato da due movimenti contrarii ed egualmente veloci, esso rimane in riposo assoluto.

Sarebbe facile il mostrare con esempli acconciamente scelti che queste conseguenze si ponno generalizzare dicendo, che « quando un corpo è animato nello stesso tempo da molti « movimenti diretti secondo la medesima linea, ma gli uni « per un verso, gli altri pel verso contrario, fatta la somma « di tutte le velocità dirette da una parte, e la somma di « tutte le velocità dirette dall'altra parte, la velocità assoluta « del corpo è volta dalla parte della somma maggiore, ed « eguale alla differenza delle due somme ».

16. Veggiamo ora che cosa debba avvenire qualora un corpo abbia un movimento proprio, e partecipi intanto al movimento di altri corpi secondo una direzione differente. Lungo un lato di una tavola orizzontale sia inchiodata una riga o sponda AB (*tav.* 1, *fig.* 2), contro la quale si appoggi uno

de' lati della tavoletta EFGH, semplicemente posata sulla tavola. Facciamo scorrere questa tavoletta in modo, che appoggiandosi sempre contro la sponda AB ed avanzandosi con moto equabile per un minuto secondo, essa passi dalla posizione EFGH alla posizione *efgh;* tutti i suoi punti in questo movimento descriveranno rette parallele ed eguali ad E*e*, cioè alla distanza percorsa dalla tavoletta; cosicchè una pallina posata in M, partecipando al moto della tavoletta, si troverà in *m* alla fine di un minuto secondo. Supponiamo adesso che mentre la tavoletta viene da EG in *eg*, la pallina invece di star sempre nello stesso punto della tavoletta, percorra con moto equabile la lunghezza del canaletto MN scolpito nella superficie di essa. Se la tavoletta intanto non si muovesse, il mobile alla fine di un minuto secondo si troverebbe in N; ma a cagione del moto della tavoletta, alla fine di quel tempo il punto N sarà passato in *n;* dunque in virtù del doppio movimento da cui la pallina si trova animata, essa, alla fine di un minuto secondo, si troverà in *n*.

Le due linee M*m*, N*n* essendo eguali e parallele, la figura M*mn*N è un parallelogramma; tiriamone la diagonale M*n*, e non sarà difficile il vedere che a cagione della uniformità dei due movimenti, e in grazia delle note proprietà dei triangoli simili, la pallina dopo un quarto di minuto secondo sarà al quarto della diagonale M*n;* che dopo un mezzo secondo sarà alla metà di essa, e dopo tre quarti di secondo sarà ai tre quarti di M*n*, cosicchè insomma essa descriverà la linea M*n* in un minuto secondo con moto equabile, epperò la sua velocità assoluta sarà rappresentata in grandezza e in direzione dalla diagonale M*n*. Da questo ragionamento ci è permesso di concludere, che:

« Quando un punto A (*tav.* I, *fig.* 3) è animato nello stesso
« tempo da due movimenti equabili e tali che nella unità di
« tempo il primo moto gli farebbe descrivere la retta AB, ed
« il secondo moto gli farebbe descrivere la retta AC, il mobile

« descriverà effettivamente nell'unità di tempo la diagonale « AD del parallelogramma costrutto sui lati AB, AC ».

Oppure in altri termini:

« Quando un punto materiale è animato nello stesso tempo « da due velocità rappresentate dai lati AB, AC di un pa- « rallelogramma, la diagonale AD di questo parallelogramma « rappresenta in grandezza e in direzione la velocità effettiva « con cui quel punto si muove ».

In ciò consiste il teorema del *parallelogramma dei movimenti* o *delle velocità*, del quale si fa uso continuo in tutta la meccanica: ne risultano molte immediate conseguenze, che noi esporremo qui brevemente.

Quando un punto è animato da due velocità che fanno tra di loro un angolo retto, il quadrato della velocità con cui il punto si muove, o della velocità *risultante*, è eguale alla somma dei quadrati delle due velocità date o *componenti*. Infatti allora la diagonale è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABD, di cui i lati AB, BD sono eguali alle due velocità del corpo (1).

(1) Poichè la diagonale AD (*tav.* 1, *fig.* 3) divide il parallelogramma ABDC in due triangoli eguali ABD, ACD, ne segue che i tre lati di ciascuno di questi triangoli, p. e. di ADB sono rispettivamente eguali alle due velocità *componenti* ed alla loro *risultante;* che i due angoli BAD, BDA sono rispettivamente eguali a quelli che ciascuna delle velocità componenti fanno con la risultante: e finalmente che il terzo angolo ABD del triangolo è *supplemento* di quello che le due componenti fanno tra di loro. Dette quindi $u$, $v$ le velocità componenti AB, AC; V la velocità risultante AD; $\alpha$, $\beta$ gli angoli BAD e CAD, e $\theta$ l'angolo BAC $= \alpha + \beta$, si avranno dalla trigonometria piana le seguenti relazioni

$$V = \sqrt{u^2 + 2uv\cos\theta + v^2},$$

$$\sin\alpha = v\frac{\sin\theta}{V}, \qquad \sin\beta = u\frac{\sin\theta}{V}.$$

se le velocità $u$, $v$ comprendono tra loro un angolo retto, sarà allora

$$V = \sqrt{u^2 + v^2},$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{v}{V}, \qquad \sin\beta = \cos\alpha = \frac{u}{V}.$$

17. Se un punto A (*tav.* 1, *fig.* 4) sarà animato nello stesso tempo da quante velocità vorremo, AB, AC, AD, AE, AF, il moto unico, o composto, o risultante che esso prenderà, potrà determinarsi con questa facile costruzione. Dal punto B si conduca B*c* eguale e parallela ad AC: poi dal punto *c*, si conduca *cd* eguale e parallela ad AD: poi dal punto *d*, *de* eguale e parallela ad AE, e finalmente dal punto *e* si conduca *ef* eguale e parallela ad AF. Tirando la linea A*f*, sarà questa la direzione e la velocità del movimento del punto A. Infatti conducendo da questo punto le diagonali A*c*, A*d*, A*e* del poligono A*cdef*, è facile di riconoscere, che per essere B*c* eguale e parallela ad AC, sarà A*c* la diagonale del parallelogramma costrutto sui due lati AB, AC, e rappresenterà per conseguenza la velocità unica che può sostituirsi alle due AB, AC. Similmente, per essere *cd* eguale e parallela ad AD, sarà A*d* la diagonale del parallelogramma costrutto sulle rette A*c*, AD, e rappresenterà per conseguenza la velocità unica equivalente alle due A*c*, AD, ossia alle tre AB, AC, AD. Nello stesso modo si dimostrerà, che la retta A*e* rappresenta la velocità unica equivalente alle quattro AB, AC, AD, AE; e la A*f* la velocità unica equivalente alle cinque velocità date AB, AC, AD, AE, AF.

Quando le velocità date sono tre sole, AB, AC, AD, comunque dirette (*tav.* 1, *fig.* 5), la costruzione ora insegnata fa vedere che la velocità del moto risultante è rappresentata in grandezza e in direzione dalla diagonale AG del parallelepipedo fatto sulle tre velocità date come lati. Quando questo parallelepipedo sarà rettangolo, il quadrato della velocità *risultante* sarà eguale alla somma dei quadrati delle tre velocità *componenti* (1).

(1) Dette qui $u$, $v$, $w$ le tre velocità componenti ortogonali; V la loro risultante; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gli angoli che quelle fanno con queste rispettivamente, si scorge tosto che saranno

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{u}{V}, \quad \cos\beta = \frac{v}{V}, \quad \cos\gamma = \frac{w}{V}.$$

Una osservazione assai semplice gioverà per imprimerci bene nella memoria le cose dette fin qui. Se mentre la tavoletta cammina da EG in eg (*tav.* 1, *fig.* 2), la pallina non avesse nissun moto proprio, in un minuto secondo essa verrebbe da M in *m*. Se allora la tavoletta si arrestasse, e la pallina cominciasse a muoversi nel suo canaletto, alla fine di un altro minuto secondo essa verrebbe in *n*. Ma abbiamo veduto che essa viene appunto in *n* in un minuto secondo, quando i due movimenti della tavoletta e della pallina hanno luogo nel medesimo tempo. Dunque tanto fa pel cangiamento di luogo della pallina che i due movimenti *comune* e *proprio*, sieno *simultanei* oppure *successivi*, cioè che si facciano nello stesso tempo, oppure l'uno dopo l'altro. Ragionando nello stesso modo in tutti gli altri casi, il principio della composizione del movimento potrà esprimersi dicendo: « Quando « un punto riceve nello stesso tempo diversi movimenti se« condo direzioni qualunque, il suo cangiamento di luogo « alla fine di un minuto secondo è il medesimo, come se « esso avesse prima avuto uno solo dei movimenti di cui è « animato per un minuto secondo; poi un altro dei movi« menti per un altro minuto secondo, e così fino alla fine ».

18. Poichè due moti simultanei secondo i lati di un parallelogramma producono un moto unico secondo la diagonale; quando, viceversa, sarà dato un moto unico secondo una data linea, sarà sempre permesso di considerarlo come prodotto dalla coesistenza nello stesso corpo di due moti diretti secondo i lati di un parallelogramma di cui quella linea sia la diagonale: così alla velocità rappresentata dalla linea AD (*tav.* 1, *fig.* 6) si potranno sostituire col pensiero le velocità rappresentate dalle due linee AB, AC, oppure dalle due A*b*, A*c*, o dalle A*b'*, A*c'* ecc.

E similmente, poichè tre moti simultanei secondo i tre lati contigui di un parallelepipedo equivalgono ad un moto unico secondo la diagonale; un moto unico secondo una retta qualunque potrà sempre riguardarsi come risultante da tre moti secondo i tre lati di qualsivoglia parallelepipedo che abbia per diagonale la linea data.

In ciò consiste il principio della scomposizione del moto, che agevola mirabilmente la soluzione di quasi tutte le quistioni di meccanica (1).

19. Quando due punti si muovono pel medesimo verso sulla medesima retta, cosicchè uno preceda e l'altro segua, se quello che va innanzi cammina più presto che l'altro, i due punti si allontaneranno sempre più. Se il primo, per esempio, fa cinque metri per minuto secondo e l'altro fa solamente tre metri, l'effetto, quanto alla loro distanza scambievole, sarà il medesimo, come se il secondo punto stesse fermo, e l'altro camminasse con velocità di soli due metri; quindi si dirà che quando un punto va innanzi con velocità di cinque metri, e l'altro lo segue con velocità di tre metri soltanto, la loro velocità *relativa*, cioè la velocità del primo, rispetto al secondo, è eguale a due metri, cioè è eguale alla differenza delle due velocità assolute. Se dunque le due velocità assolute fossero eguali, cioè se i due punti andassero egualmente presto, la loro velocità relativa sarebbe nulla; essi infatti starebbero sempre alla medesima distanza l'uno dall'altro, precisamente come se nè l'uno, nè l'altro non si muovessero.

Se al contrario i due punti andassero uno da levante a ponente, facendo cinque metri per minuto secondo, e l'altro da ponente a levante, facendo tre metri per minuto secondo, è chiaro che essi si allontanerebbero o si avvicinerebbero fra loro precisamente, come se uno di essi stesse fermo, e l'altro avesse una velocità eguale ad otto metri; quindi si

(1) Le medesime formole, che abbiamo riferite nelle note precedenti per la composizione de' movimenti, servono egualmente alla loro scomposizione.

conchiude che quando due punti si muovono sulla medesima retta con direzioni contrarie, la loro *velocità relativa* è eguale alla somma delle loro velocità assolute.

Quando un punto sta fermo e l'altro si muove avvicinandosi al primo, o scostandosene, l'avvicinamento o lo scostamento è il medesimo come se il primo punto si movesse e l'altro stesse fermo. Da ciò nasce l'illusione che si prova passando un fiume sopra una *chiatta;* che pare che la chiatta stia ferma, e che una delle rive si avvicini a noi, e l'altra si allontani.

20. Supponiamo ora che due punti A, B (*tav.* 1, *fig.* 7) si muovano con le velocità rappresentate in grandezza e in direzione dalle rette AM, BN, e si voglia trovare quale sia la velocità relativa di B rispetto ad A. Pel punto B si conducano le rette BH parallela e BI perpendicolare ad AM: e intorno a BN come diagonale si faccia il rettangolo BHNI: alla velocità unica BN potremo sostituire le due velocità componenti BH, BI: se ora dalla BH si toglie la parte H*m* eguale ad AM, ciò che avanza, cioè B*m*, sarà la velocità relativa di B secondo la direzione parallela ad AM. Siccome poi il punto A non ha nissun movimento perpendicolarmente ad AM, cioè parallelamente a BI, ne segue che in questa direzione la velocità relativa del punto B sarà eguale alla sua velocità assoluta BI: dunque finalmente la velocità relativa totale di B sarà quella che risulta dalle due B*m*, BI, cioè sarà BQ, diagonale del rettangolo fatto sui lati B*m*, BI. Da ciò concluderemo che un uomo navigando secondo la linea AM, ed osservando un'altra nave la quale andasse per la linea BN, attribuirebbe a questa un movimento diverso da quello che essa ha veramente, e giudicherebbe il suo cammino diretto secondo BQ (1).

(1) È facile il tradurre questa costruzione in algebra, mercè delle formole delle note precedenti: infatti ponendo $AM = u$, $BN = v$, e

21. Segue dalla natura stessa del moto relativo che esso non viene alterato, aggiungendo ai due mobili una stessa velocità secondo direzioni parallele; così nell'esempio precedente il moto relativo delle due navi non cambierebbe, se, oltre ai loro movimenti proprii AM, BN, esse fossero entrambe trasportate dalla corrente con eguale velocità secondo le direzioni parallele AV, BU scelte ad arbitrio. Per fare di questa osservazione una applicazione che sia per tornarci utile nello studio della composizione delle macchine, supponiamo che la ruota C (*tav.* 1, *fig.* 8) rotoli sul suolo rasente la faccia del muro ABEF: un pennello P attaccato alla circonferenza della ruota descriverà sul muro la curva AMPB, alla quale i Geometri han dato il nome di *cicloide*. Ora se noi concepiamo che venga impresso alla ruota ed al muro qualunque moto comune progressivo secondo la direzione BA, il loro moto relativo non sarà punto alterato, e il pennello seguiterà a descrivere sul muro la medesima curva di prima. Da ciò noi possiamo dedurre che facendo a mano alzata descrivere equabilmente una circonferenza di circolo ad un toccalapis, la cui punta lasci la sua traccia sopra un foglio di carta, se questo intanto si muoverà equabilmente in linea retta, con velocità eguale a quella con cui il toccalapis si muove in giro, la curva che verrà così tracciata sul foglio mobile sarà una cicloide.

chiamando $\varepsilon$ l'angolo compreso fra le direzioni di queste due velocità, sarà

$$BH = v \cos\varepsilon \ , \quad BI = v \sin\varepsilon \ ,$$

$$Bm = v \cos\varepsilon - u$$

e quindi la cercata velocità relativa BQ, risultante delle due $Bm$, BI, avrà per valore

$$Bm' = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\varepsilon}$$

e l'angolo QBH che la sua direzione fa con quella della velocità $u$, sarà determinato dall'equazione

$$\text{tang}\, QBH = \frac{BI}{Bm} = \frac{v\sin\varepsilon}{v\cos\varepsilon - u} \ .$$

## CAPITOLO QUINTO

### TEOREMI SUL MOVIMENTO DI UN CORPO SOLIDO (1).

22. Quando il movimento di un solido non è un semplice moto di translazione secondo una linea data, nè un semplice moto di rotazione intorno un asse fisso, egli è sommamente difficile di rappresentarsi chiaramente allo spirito i cangiamenti di luogo di ciascuno de' punti del corpo, e le varie velocità con cui questi punti si muovono. Una tale difficoltà si rimuove mostrando come ogni movimento di un corpo solido si possa sempre scomporre col pensiero in altri movimenti meno complessi, cioè in movimenti di translazione e di rotazione, come già nel capitolo terzo abbiam mostrato potersi scomporre il movimento delle ruote di carri, e quello delle macine verticali. Noi ci proponiamo di dare nel capitolo presente questa dimostrazione, esponendo alcuni teoremi del signor Chasles e del signor Poinsot sul movimento dei solidi. In alcuni di questi teoremi, considerandosi soltanto i cangiamenti di luogo infinitamente piccioli che avvengono nei singoli punti di un corpo in ogni brevissimo istante del moto

(1) I lettori che si propongono unicamente di apprendere quanto è più indispensabile per le applicazioni della Cinematica alle arti possono ommettere tutto il capo presente, ad eccezione del teorema primo contenuto nel § 23. Coloro stessi che considereranno la Cinematica come un ramo di scienza astratta, e che vorranno acquistare in essa più ampie cognizioni, potranno in una prima lettura di questo trattato ommettere il capitolo presente, che non sarebbesi guari potuto collocare altrove, ma che meglio s'intenderà dopochè siasi con lo studio de' capitoli che seguono acquistata più famigliarità con la considerazione del movimento.

di questo, essi varranno solo a darci una distinta idea di questi piccolissimi spostamenti; negli altri considerandosi non solamente due posizioni consecutive e vicinissime del mobile, ma bensì il complesso di tutte le sue posizioni successive, questi ci somministreranno una fedele immagine di tutte le vicende del movimento, quanto sia grande la sua durata, manifestandoci le leggi con le quali esso viene continuamente passando da una posizione ad un'altra posizione qualunque.

Tutti questi teoremi riposano sopra un lemma molto semplice, che può enunciarsi così:

« La posizione di un solido nello spazio è pienamente « conosciuta, quando si conoscono quelle di tre punti di « esso collocati ne' tre vertici di un triangolo scaleno ».

Infatti se i tre punti A, B, C del corpo, debbono coincidere coi tre punti *a*, *b*, *c* dello spazio, il triangolo ABC dee coincidere in tutte le sue parti col triangolo *abc*: ora è evidente che vi ha un modo solo di sovrapporre uno all'altro due triangoli scaleni eguali: esiste dunque una sola posizione del corpo, per cui i tre punti A, B, C di esso occupino le posizioni date *a*, *b*, *c*.

Nello stesso modo si scorge che quando una figura piana qualunque si fa muovere nel proprio piano, la sua posizione è pienamente determinata, purchè si conoscano quelle di due punti qualunque di essa figura: poichè dati i punti A, B, non vi ha che un modo solo di sovrapporli ai punti *a*, *b* del piano, se non è permesso di rovesciare la figura, cioè se è determinata la *faccia* della figura che dee applicarsi sul piano: determinata dunque la posizione della retta AB, resta pure determinata quella di tutta quanta la figura.

23. *Teorema primo.* « Se una retta definita si muove comunque « in un piano, il suo moto può per un istante riguardarsi « come una semplice rotazione fatta intorno un punto di « questo piano ».

Siano AB, $ab$ (*tav.* 4, *fig.* 1) due posizioni infinitamente vicine della retta mobile; congiungansi $Aa$, $Bb$, e nei punti di mezzo D, E ergansi le perpendicolari DO, EO, le quali s'incontrino in O: il moto per cui la retta AB è passata di AB in $ab$ potrà riguardarsi come una rotazione fatta intorno al punto O.

Condotte infatti le rette OA, O$a$, OB, O$b$ saranno manifestamente OA$=$O$a$, OB$=$O$b$; dunque i due triangoli OAB, O$ab$, avranno tutti i loro lati eguali ciascuno a ciascuno, e saranno per conseguenza eguali. Dunque facendo girare il triangolo OAB intorno al punto O finchè il lato OA coincida con O$a$, tutto il triangolo OAB coinciderà col triangolo O$ab$, e la retta AB con la retta $ab$; dunque il moto di questa retta da AB in $ab$ può riguardarsi come una rotazione fatta intorno al punto O.

Osservisi che se prolungata la AB si abbasserà sovra di essa dal punto O la perpendicolare OK, pel piede K di questa perpendicolare verrà pure a passare il prolungamento della $ab$: infatti nella rotazione di AB intorno al punto O, il punto K descriverà un arco infinitamente piccolo di circolo, il quale si potrà considerare come una retta perpendicolare a KO: l'archetto descritto dal punto K cadrà dunque sulla retta KAB, e per conseguenza il punto K non uscendo dalla retta AB, mentre questa passa da AB in $ab$ dovrà trovarsi ancora su quest'ultima retta: esso cadrà dunque nella intersezione delle due rette.

24. Dall'ultima osservazione fatta nel § precedente risulta manifestamente che il moto della retta AB in $ab$, può pure considerarsi come composto di un moto rotatorio intorno al punto K, e di un moto di scorrimento nella direzione stessa della retta AB. Poichè facendo girare la retta AB intorno al punto K essa verrebbe in A′B′, e potrebbe poi passare in $ab$ con un semplice scorrimento longitudinale, descrivendo tutti i suoi punti spazietti infinitesimi ed eguali ad A′$a$.

Dimostrasi ancora facilmente che:

(2°) Il moto della retta da AB in *ab* può in infinite guise considerarsi come scomposto in un moto progressivo ed in un moto rotatorio, potendo assumersi arbitrariamente l'uno o l'altro di questi due movimenti.

Infatti pei due punti A, B (*tav.* 4, *fig.* 2) conducansi ad arbitrio le due rette AA', BB' parallele ed eguali: la data retta AB potrà passare in A'B' con un semplice moto di progressione: ma ripetendo qui la medesima costruzione praticata di sopra si troverà il centro O della rotazione, mercè della quale la retta può passare da A'B' in *ab;* dunque ecc.

Oppure, preso ad arbitrio un centro O (*tav.* 4, *fig.* 3) nel piano delle due rette infinitamente vicine AB, *ab*, facciasi girare la AB intorno a questo centro, finchè venga a prendere la posizione A'B' parallela ad *ab:* facendo poi scorrere la A'B' parallelamente a se stessa, essa potrà condursi a coincidere con *ab*.

25. Applicando qui le osservazioni fatte nel § 23, dalle proposizioni testè dimostrate si dedurranno immediatamente queste altre.

(3°) Se una figura piana si muove comunque nel proprio piano, il suo moto può, per un istante, riguardarsi come una rotazione fatta intorno ad un punto di questo piano.

(4°) Se una figura qualunque si muove in qualunque modo nel proprio piano, questo movimento in ciascuno istante, può in infinite guise scomporsi in un moto progressivo, ed in un moto rotatorio, assumendo ad arbitrio l'uno o l'altro di questi movimenti.

Ancora: osservando che la posizione di un solido è pienamente conosciuta, quando si conosce quella di una sua sezione piana data, si avranno le due proposizioni seguenti:

(5°) Se un solido si muove in modo che una delle sue sezioni mai non esca dal proprio piano, questo movimento potrà a ciascun istante considerarsi come una rotazione fatta intorno di un asse perpendicolare al piano della sezione data.

(6°) Se un solido si muove in modo che una delle sue sezioni mai non esca dal proprio piano, questo moto a ciascun istante potrà in infinite guise scomporsi in un moto progressivo parallelo ad una retta condotta nel piano, ed in un moto rotatorio fatto intorno ad un asse perpendicolare al medesimo piano, assumendo ad arbitrio l'uno o l'altro movimento.

Dal teorema (5°) facilmente ancor si deduce quest'altro:

(7°) Se un solido si muove in guisa che una sua sezione (S) si mantenga sempre parallela a se stessa, questo moto potrà considerarsi come composto di un moto progressivo secondo una retta perpendicolare al piano della sezione (S), e di un moto rotatorio intorno alla medesima retta.

Infatti, detta (S') la nuova posizione in cui è passata la sezione (S), si proietti (S') sul piano di (S), e sia (*s*) questa proiezione, che sarà una figura identicamente eguale ad (S). Sia O il punto del piano di (S), intorno al quale questa sezione dee girare per venire a coincidere con (*s*): e per questo punto si conduca una retta perpendicolare al piano. È manifesto che facendo scorrere il corpo dato parallelamente a questa retta fintantochè la sezione (S) sia venuta nel piano di (S'), e poi facendolo girare intorno alla medesima retta si condurrà (S) a coincidere con (S'), e tutto il corpo sarà passato dalla prima alla seconda delle posizioni date.

26. Secondo i teoremi (5°) e (6°) quando un solido si muove comunque, ma in guisa che una delle sue sezioni mai non esca dal proprio piano, questo movimento può a ciascuno istante considerarsi o come una semplice rotazione intorno di un asse perpendicolare a quel piano, o come composto di un moto progressivo parallelo al piano, e di un moto rotatorio intorno ad un asse a questo perpendicolare. Ne segue che ogni qualvolta si imprimeranno ad un solido questi due

ultimi movimenti progressivo e rotatorio, il moto complessivo che ne risulta si potrà pur sempre riguardare come un semplice moto rotatorio intorno di un asse facile a determinarsi.

Sia ABDE (*tav. 4, fig. 4*) una sezione fatta in un solido al quale siasi impresso un movimento progressivo secondo la direzione OF, ed un moto rotatorio intorno di un asse condotto pel punto O perpendicolarmente al piano della figura; in guisa che, in un istante brevissimo, tutti i punti del corpo percorrano parallelamente alla retta OF spazii picciolissimi eguali tra di loro ed eguali ad OV, ed intanto il corpo descriva intorno all'asse condotto per O, e pel verso indicato dalla saetta, l'angolo DOE, anch'esso piccolissimo.

Sulla retta OD, perpendicolare alla direzione OF del moto progressivo, consideriamo un punto qualunque H: questo, mentre in virtù del moto progressivo si avanzerà parallelamente ad OF per lo spazietto $Hh = OV$, descriverà in virtù del moto rotatorio un archetto di circolo di raggio OH, il quale si confonderà con la HI perpendicolare ad OD. I due spostamenti del punto H cagionati dal doppio moto del corpo saranno dunque diretti in sensi contrarii, ed il punto H si muoverà pel verso di OF o pel verso di OF′, secondo che la velocità del suo moto progressivo sarà maggiore o minore di quella del moto rotatorio. Ora la prima velocità è la medesima in tutti i punti del corpo: la seconda va crescendo al crescere della distanza dal punto O. Dunque i punti collocati sulla retta OD e vicini a questo punto O andranno innanzi pel verso OF, mentre sulla medesima retta OD i punti più lontani indietreggeranno; fra gli uni e gli altri dovrà dunque esistere un certo punto C, il quale retrocedendo pel suo moto rotatorio di una quantità eguale a quella di cui si avanza in virtù del moto progressivo, starà per un istante assolutamente immobile: ciò che diciamo del punto C vale egualmente per tutti i punti della perpendicolare al piano della figura innalzata nel punto C: questa retta rimarrà dunque immobile per un istante come se il corpo fosse animato da un semplice movimento di rotazione intorno alla retta medesima.

Egli è assai facile di determinare la posizione del punto C: poichè portando sulla OF′ in direzion contraria a quella del moto progressivo del corpo lo spazietto $Ov = OV$, e pel punto $v$ conducendo la retta $vL$ parallela ad OD fino all'incontro della OE, la perpendicolare LC abbassata da L sulla retta OD andrà a cadere nel punto cercato C, essendo manifestamente eguali per questo punto gli spazietti $Cc$, CL descritti contemporaneamente in virtù del moto progressivo e del moto rotatorio.

L'asse condotto per C perpendicolarmente al piano della figura, il quale per un istante rimane immobile mentre il corpo si aggira intorno ad esso, chiamasi *asse di spontanea rotazione.*

27. Per una retta data potendo sempre condursi un piano parallelo a qualsivoglia altra retta che non incontri la prima, è chiaro che una retta che si muova in qualunque modo nello spazio, si può riguardare come un corpo che muovesi in guisa che per un istante una sua sezione rimane parallela a se stessa: ond'è permesso di concludere che qualunque movimento di una retta può per un istante riguardarsi come composto di un moto progressivo secondo un certo asse, e di un moto rotatorio intorno al medesimo asse: ma io mi propongo di dimostrar qui un teorema molto più generale; cioè che una tale scomposizione si può fare in una infinità di maniere differenti: esso può dunque enunciarsi così:

(8°) « Se una retta si muove nello spazio in qualunque « modo, il suo movimento può in infinite guise risolversi « in un moto progressivo secondo una certa retta, ed in un « moto di rotazione intorno alla medesima retta ».

Siano AB, $ab$ (*tav.* 4, *fig.* 5) due posizioni successive della retta mobile, e pel punto A si conduca la $Ab'$ eguale e parallela ad $ab$; nel piano $BAb'$ segnisi la NN′, che faccia con le due

AB, Ab' gli angoli BAN, b'AN' eguali tra di loro: finalmente per la retta NN' si conduca ad arbitrio un piano qualunque (P), il quale farà manifestamente angoli eguali con le due rette AB, Ab', e per conseguenza con le due rette AB, *ab*, poichè quest'ultima è per costruzione parallela ad Ab'.

Se dunque sul piano (P) si intendano proiettate le due rette eguali AB, *ab*, anche le loro proiezioni saranno eguali, e si potranno perciò riguardare come due proiezioni successive di una medesima retta. Trovisi dunque per mezzo del teorema 1° l'asse perpendicolare al piano (P), intorno al quale la prima proiezione dee girare per venirsi a sovrapporre alla seconda; si concepisca fatta questa rotazione, e s'immagini che insieme con la proiezione di AB siasi pur fatto girare intorno al medesimo asse la retta stessa AB; essa si sarà condotta così ad avere sul piano (P) la medesima proiezione che la retta *ab*, cioè sarà venuta nel medesimo piano perpendicolare a (P) in cui giace la *ab;* e siccome le due rette fanno per costruzione angoli eguali col piano (P), esse sono tra loro parallele, e facendo muovere la AB parallelamente all'asse di rotazione, essa verrà a coincidere con *ab*.

28. Prima di esporre i teoremi più generali sulla scomposizione del moto di un solido che cangia luogo nello spazio in un modo qualunque, io premetterò ancora a guisa di lemma la proposizione seguente, relativa ad un corpo solido il quale si muove così, che uno de' suoi punti rimanga immobile, girando il corpo in qualunque modo intorno a questo punto fisso o *cardine*.

(8°) « Quando un solido gira comunque intorno a un « punto fisso, il suo moto può per un istante riguardarsi « come una rotazione fatta intorno di un asse che passa pel « punto fisso, e che dicesi *asse instantaneo di rotazione.* »

Sia A (*tav.* 4, *fig.* 6) il punto intorno al quale il corpo si aggira: per questo punto e nella prima posizione del corpo facciasi passare un piano; e nella sezione ch'esso fa nel corpo segnisi il triangolo ABC: passando il corpo da questa prima posizione ad un'altra infinitamente vicina, il triangolo ABC verrà in $Abc$: dico che questo moto di ABC in $Abc$ si potrà sempre riguardare come una rotazione fatta intorno di un asse convenientemente condotto pel punto A.

Tirate le rette $Bb$, $Cc$, dividansi esse per mezzo ne' punti D, E, e per questi punti si facciano passare due piani rispettivamente perpendicolari a $Bb$, $Cc$, i quali passeranno entrambi pel punto A a motivo di $AB=Ab$ e di $AC=Ac$: sia OO′ la comune intersezione di questi due piani: sarà OO′ l'asse *instantaneo*, intorno al quale girando il triangolo ABC potrà passare nella posizione $Abc$.

Prendasi infatti sulla retta OO′ un punto qualunque O, e si considerino le due piramidi triangolari che abbiano comuni il vertice O e lo spigolo AO, e le cui basi siano i due triangoli ABC, $Abc$: queste due piramidi saranno eguali, e per conseguenza facendo girare la prima intorno allo spigolo comune AO, essa verrà sovrapporsi in tutte le sue parti alla seconda, epperò il triangolo ABC verrà a coincidere con $Abc$.

L'eguaglianza delle due piramidi OABC, O$Abc$ facilmente si dimostra: poichè, i due punti B, $b$ essendo collocati ad egual distanza l'uno di qua, l'altro di là del piano DAO, sono equidistanti dal punto O, che è in questo piano: e similmente i due punti C, $c$ sono pure equidistanti da O: le due piramidi avendo le loro basi eguali per ipotesi, lo spigolo Ao comune e gli altri due spigoli che passano per O, eguali ciascuno a ciascuno sono dunque eguali.

29. (9°) « Se un solido si muove in qualunque modo nello « spazio, il suo movimento può per un istante ed in infinite « guise riguardarsi come composto di due rotazioni fatte in- « torno a due assi tra loro perpendicolari, le cui direzioni « generalmente parlando non s'incontrano ».

Segnisi nel corpo considerato nella sua prima posizione il triangolo ABC, e sia questo, pel moto del corpo passato nella posizione infinitamente vicina *abc*. Si prolunghino i piani di questi due triangoli finch'essi si taglino secondo la retta (L): facendo girare il corpo dato intorno a questa retta, il piano del triangolo ABC verrà a coincidere con quello del triangolo *abc*; e queste due figure, trovandosi adesso nello stesso piano, potranno essere condotte a coincidere col far girare il triangolo ABC intorno ad un asse perpendicolare al piano in cui esso giace, e condotto per un punto O che si determina pel teorema 2°. Il triangolo ABC essendo così venuto a sovrapporsi ad *abc*, il corpo dato sarà passato dalla prima alla seconda posizione per via di due rotazioni fatte l'una intorno all'asse (L), l'altra intorno all'asse O.

(10°) « Se un solido si muove in qualunque modo nello « spazio, il suo movimento può in ciascun istante ed in in« finite guise riguardarsi come composto di un moto pro« gressivo e di un moto rotatorio ».

Segninsi ad arbitrio nelle due posizioni successive del corpo i punti omologhi A, *a*; si tiri la retta A, *a*, e si supponga che il corpo scorra parallelamente a questa, finchè il punto A venga a coincidere con *a*. Facendo allora girare il corpo intorno ad un asse convenientemente condotto per questo punto, si potrà sempre farlo passare alla seconda posizione data in virtù del teorema 8°.

30. Fra gli infiniti modi in cui il movimento di un solido può, pel teorema ora dimostrato, riguardarsi come composto di due moti l'uno progressivo, l'altro rotatorio, merita speciale considerazione quello in cui l'asse di rotazione risulta parallelo alla direzione del moto progressivo: allora per un istante il moto del corpo è perfettamente simile a quello di una vite che gira nella sua chiocciola, e che ad ogni giro si avanza nella direzione stessa dell'asse di rotazione di una quantità eguale al *passo* della vite: che una simile scomposizione del movimento sia sempre possibile, risulta dal seguente teorema:

(11°) « Se un solido si muove in qualsivoglia modo « nello spazio, il suo movimento può sempre per un istante « riguardarsi come composto di un moto progressivo secondo « una certa retta, e di un moto rotatorio, intorno alla retta « medesima ».

Segnisi nella prima posizione del corpo il triangolo qualunque ABC (*tav.* 4, *fig.* 7); e sia questo, muovendosi insieme col corpo di cui fa parte, passato in *abc*. Conducasi pel punto A un piano parallelo a quello di *abc*, e in questo piano si segni il triangolo A*b'c'* i cui lati sieno rispettivamente eguali e paralleli a quelli di *abc*.

Tirando le rette B*b'*, C*c'*; conducendo pei loro punti di mezzo D, E due piani perpendicolari rispettivamente a B*b'*, C*c'*, i quali si taglieranno secondo la retta OA'O', si dimostrerà come nel teorema 8°, che le due piramidi triangolari che hanno comuni il vertice O e lo spigolo OA, e le cui basi sono i due triangoli ABC, A*b'c'*, sono eguali in tutte le loro parti. Le basi di queste due piramidi sono dunque similmente poste rispetto ad un piano (P) condotto pel punto A perpendicolarmente alla retta OAO': le proiezioni dei due triangoli ABC, A*b'c'* fatte sopra questo piano saranno dunque eguali tra di loro, e saranno pure eguali a quella del triangolo *abc* sul piano medesimo, poichè questo triangolo ha per costruzione tutti i suoi lati eguali e paralleli a quello del triangolo A*b'c'*: per conseguenza, ed in virtù del teorema 3° si potrà sempre trovare un asse perpendicolare al piano (P), cioè parallelo alla retta OAO', intorno al quale facendo girare la proiezione del triangolo ABC, e questo triangolo stesso, la prima venga a coincidere con la proiezione del triangolo *abc*, ed il secondo venga a collocarsi in modo che il suo piano sia parallelo a quello di *abc*, ed i suoi tre vertici A, B, C cadano rispettivamente sulle perpendicolari abbassate sul piano (P) dai tre punti *a*, *b*, *c*: epperò facendo scorrere il triangolo ABC lungo queste perpendicolari, esso verrà a sovrapporsi ad *abc*, ed il corpo di cui esso fa parte, passerà così dalla prima alla seconda posizione data.

31. Come più movimenti progressivi simultaneamente impressi in un corpo secondo direzioni differenti equivalgono ad un movimento unico determinato in direzione ed in velocità, così più rotazioni simultanee fatte intorno a più assi che s'incontrano facendo tra di loro angoli qualunque, equivalgono ad una rotazione unica fatta intorno ad un asse e con velocità angolare facili a determinarsi, con una regola affatto analoga a quella che serve alla composizione de' moti progressivi. Infatti:

(12°) « Due rotazioni fatte intorno ai due lati di un « parallelogramma, con velocità angolari rappresentate dalle « lunghezze dei lati medesimi, equivalgono ad una rotazione « unica fatta intorno alla diagonale di questo parallelogramma, « con velocità angolare rappresentata dalla lunghezza di essa « diagonale. ».

Sia un solido al quale siano stati impressi due movimenti di rotazione intorno ai due assi AB, AC (*tav.* 4, *fig.* 8), ed in guisa tale che queste rotazioni osservate guardando da B e da C verso A, appaiano farsi per lo stesso verso, cioè da destra a sinistra per esempio; siano le velocità angolari di queste due rotazioni rappresentate dalle lunghezze AB, AC. Formato il parallelogramma ABDC, e condotta la diagonale AD, dico che il corpo girerà intorno a questa diagonale, con velocità angolare rappresentata dalla lunghezza AD.

Ad un istante qualunque del movimento si consideri nel corpo rotante un punto M, contenuto nel piano del parallelogramma ABDC, e da questo punto si abbassino sui lati AB, AC le perpendicolari MP, MQ. In un tempo infinitamente breve $\theta$, il punto M, in virtù della rotazione del corpo intorno all'asse AB, descriverà, innalzandosi al dissopra del piano BAC, un piccolissimo arco di cerchio, di raggio MP, la cui lunghezza sarà espressa dal prodotto $AB \times PM \times \theta$, e che potrà riguardarsi come una retta perpendicolare in M al piano della figura. Ma nel medesimo tempo, ed in virtù della rotazione intorno all'asse AC, il medesimo punto M descriverà pure, abbassandosi sotto al piano ABC, un piccolissimo archetto di circolo, che potrà similmente riguardarsi come una retta perpendicolare al piano della figura, e la cui lunghezza sarà espressa dal prodotto $AC \times QM \times \theta$. Per la simultaneità di questi due movimenti direttamente contrarii, il punto M del corpo rotante si sarà dunque innalzato al dissopra del piano BAC delle quantità $(AB \times PM - AC \times QM)\theta$. Ora se il corpo stesso si fosse fatto rotare intorno ad AD e con velocità rappresentata dalla lunghezza AD, lo spazietto descritto dal punto M perpendicolarmente al piano CAB sarebbe stato manifestamente $= AD \times RM \times \theta$; ma dimostrasi in geometria che

$$AD \times RM = AB \times PM - AC \times QM\,;$$

dunque il cangiamento di luogo del punto M per la rotazione unica fatta intorno alla diagonale AD, sarebbe il medesimo che risulta dalla doppia rotazione fatta intorno ai lati AB, AC. La stessa dimostrazione vale per qualsivoglia punto del piano del parallelogramma ABCD, con la sola avvertenza, che se il punto cadesse fuori dell'angolo BAC e del suo opposto al vertice, invece della differenza $AB.PM - AC.QM$ dovrebbe prendersi la somma $AB.PM + AC.QM$. Ora non può una sezione del corpo girare intorno alla diagonale AD senza che il corpo intero giri insieme con questa sezione intorno alla stessa retta e con la stessa velocità angolare.

Come dal teorema del parallelogramma delle velocità si deduce quello del parallelepipedo delle velocità, allo stesso modo dalla proposizione ora dimostrata si deduce pure quest'altra:

(13°) « Quando ad un solido s'imprimono tre rotazioni « simultanee intorno ai tre lati di un parallelepipedo, e con

« velocità angolari rappresentate dalle lunghezze dei lati ri-
« spettivi, il corpo si muove come se fosse animato da una
« rotazione unica fatta intorno alla diagonale del parallele-
« pipedo, e con velocità angolare rappresentata dalla lun-
« ghezza della diagonale medesima » (1).

32. Si è dimostrato nel § 28 (teorema 8°), che quando un solido si muove in qualunque modo intorno ad uno de' suoi punti, il quale stia immobile nello spazio a guisa di cardine, il moto del corpo può sempre per un istante riguardarsi come una semplice rotazione fatta intorno un asse, che passi per quel punto fisso. Per questo istante l'asse di rotazione rimarrà dunque immobile nello spazio, ed i punti in cui esso incontra la superficie del corpo, rimarranno pure gli stessi per tutta la durata di questo istante; la qual cosa esprimesi dicendo, che l'asse istantaneo rimane per un momento immobile così nello spazio, come nel corpo. Ma notisi bene, che se nella continuazione del moto, l'asse instantaneo vien cangiando posizione nello spazio, esso cangia pur necessariamente posizione rispetto al corpo, cioè vanno cambiandosi sulla superficie di questo i punti in cui essa è incontrata

(1) Se un solido si farà rotare simultaneamente intorno a tre assi ortogonali delle $x$, $y$, $z$, con le velocità angolari $p$, $q$, $r$, queste equivarranno dunque ad una rotazione unica fatta con velocità angolare

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

intorno alla retta che fa coi tre assi gli angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ determinati dalle equazioni

$$\cos\alpha = \frac{p}{\omega}\,, \quad \cos\beta = \frac{q}{\omega}\,, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\omega}\,.$$

E viceversa se un solido gira con velocità angolare $\omega$ intorno di una retta, che faccia coi tre assi gli angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, questo suo moto si potrà intendere scomposto in tre rotazioni fatte intorno agli assi delle $x$, $y$, $z$ con le velocità angolari

$$p = \omega\cos\alpha\,, \quad q = \omega\cos\beta\,, \quad r = \omega\cos\gamma\,.$$

dall'asse; poichè quelli, in cui essa era incontrata dall'asse in un certo istante rimanendo immobili per questo istante medesimo, e l'asse di rotazione essendo intanto passato in una posizione differente dalla prima, esso più non può incontrare in que' punti medesimi la superficie del corpo.

33. Per ben concepire ciò che avviene nella rotazione di un corpo intorno di un punto fisso, osservisi che, poichè l'asse istantaneo per tutta la durata del moto passa sempre necessariamente pel punto fisso, spostandosi continuamente e nello spazio e rispetto al corpo, esso con questo spostamento descriverà necessariamente nello spazio una certa superficie conica col vertice nel punto fisso: e che il complesso delle successive posizioni ch'esso prenderà rispetto al corpo, formerà pure una seconda superficie conica col vertice nello stesso punto.

Sia O (*tav.* 4, *fig.* 9) questo vertice comune, ed OP l'asse instantaneo in una delle sue successive posizioni. Dal centro O, e con raggio qualunque OA intendasi descritta una superficie sferica, la quale tagli le due superficie coniche secondo due curve che saranno come le basi di questi coni. Una di queste curve AH sarà fissa nello spazio, l'altra *ah* sarà fissa nel corpo, cioè lo seguirà in tutti i suoi movimenti.

Concepiscasi il tempo diviso in intervalli infinitamente brevi od in *istanti*: segninsi sulla curva BC i punti successivi A, B, C, D.... pei quali nei successivi istanti viene a passare il polo dell'asse di rotazione: e congiungansi i punti AB, BC, CD..... con tanti archetti di circoli massimi, sostituendo così alla curva un poligono sferico di lati infinitesimi.

Se ora concepiscasi pure divisa l'altra curva *ah*, base del cono mobile, in archetti di circoli massimi, *ab*, *bc*, *cd*, ..... rispettivamente eguali ad AB, BC, CD ....., è chiaro che girando il corpo pel primo istante intorno al raggio OA, alla fine di questo istante il punto *b* del corpo verrà a coincidere col punto B dello spazio; che nell'istante seguente girando il corpo intorno ad OB, il punto *c* del corpo verrà a coincidere col punto C dello spazio; e così successivamente tutti i punti della curva mobile A*h*, verranno ad applicarsi sui punti corrispondenti della curva fissa AH, e per conseguenza tutte le generatrici del cono mobile verranno successivamente ad applicarsi sulle generatrici corrispondenti del cono fisso, rotolando il primo cono sul secondo senza *scorrimento* (1).

Quindi il seguente teorema:

(14°) « Il moto di un corpo che gira in qualunque modo « intorno di un punto fisso è sempre identicamente lo stesso « che quello di un certo cono col vertice nel punto fisso, « il quale rotoli sopra un altro cono tenuto immobile, e col « suo vertice nello stesso punto ».

Così dunque, se il cono mobile si considera come connesso col corpo dato, in guisa che questo debba seguirlo in tutti i suoi movimenti, facendo rotolare quel cono sopra un altro cono fisso nello spazio, con lo scegliere convenientemente i due coni, si potrà fare che il corpo prenda qualunque dato movimento intorno al punto fisso: la generatrice di contatto dei due coni sarà a ciascuno istante l'asse di rotazione del corpo, cioè il suo asse istantaneo: onde scorgesi come avvenga, che quest'asse sia mobile ad un tempo, nel corpo e nello spazio assoluto, descrivendo nello spazio la superficie del cono fisso, e nell' interno del corpo la superficie del cono mobile (1).

(1) L'enunciato e la dimostrazione di quest'ultimo teorema, sono stati da me desunti quasi letteralmente dall'opera del signor Poinsot intitolata *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, alla quale rimando il lettore per più ampli svolgimenti. Dalla medesima opera ho pur desunta la dimostrazione della composizione de' moti rotatorii.

# CAPITOLO SESTO

## DEFINIZIONE DELLE MACCHINE, TRASMISSIONE E TRASFORMAZIONE DEL MOTO. — MECCANISMO.

34. In ogni operazione d'arte meccanica sempre concorrono quattro cose, cioè: una mente intelligente e libera che presiede al lavoro; un agente o motore che vi impiega la sua forza; uno strumento che opera ed un oggetto che riceve quella modificazione che è lo scopo del lavoro. Così nell'aratura dei campi, o nella trebbiatura delle messi il contadino guida l'azione de' buoi che sono i *motori*, e questi per mezzo dello strumento chiamato *aratro*, o dell'altro detto *ruzzolone* o *ritolo* aprono i solchi, o sprigionano i grani dalle spighe: così ancora nella macinatura l'intelligenza del mugnaio regola l'azione del motore, che è l'impulso dell'acqua contro le palmette della ruota maestra, e la *macina* che è lo strumento, schiaccia il grano e lo riduce in farina. Talora concorrono nella stessa persona il primo pensiero della opportunità di un certo lavoro, l'invenzione de' mezzi atti ad eseguirlo, e la pratica di questi mezzi: il più delle volte però, colui che presiede ad un lavoro segue i precetti od imita l'esempio del primo inventore. Sovente ancora l'intelligenza che presiede al lavoro, la volontà che lo governa e la forza che lo eseguisce, risiedono tutti nella persona dell'operaio, come si vede nella maggior parte de' mestieri: talvolta l'operaio non impiega altro strumento che le sue mani, come il panattiere che con esse sole governa la pasta e la foggia in pani. Talvolta, finalmente, l'oggetto sul quale si esercita il lavoro è il corpo stesso del lavoratore, come quando l'uomo ravvia col pettine la propria capigliatura. Ma sempre pure, unite o

separate si possono ravvisare in ogni lavoro una intelligenza, una volontà, una forza, uno strumento ed un oggetto.

35. Col perfezionarsi delle arti l'uomo già più non si contenta di saper *fare*, egli vuole *fabbricare*, cioè cerca i mezzi di ottenere rapidamente lavorii *copiosi*, *uniformi*, a *buon mercato*, e si trova così condotto prima a meglio adoperare la forza delle proprie membra, poi ad impiegare altri motori, e motori i quali, per esser privi d'intelligenza, e per la loro particolare organizzazione e natura non si possono immediatamente applicare al lavoro, cioè non sono capaci di guidar lo strumento che debbono mettere in moto. Un animale, per esempio, non è capace per sè stesso di tessere, nè una corrente d'acqua di macinare. Che fa l'uomo allora? Egli imagina e costruisce un qualche congegno, il quale ricevendo dal *motore* quel movimento che esso è per sua natura atto a produrre, lo comunica, lo trasmette allo strumento, e ciò fa in guisa tale che questo si trovi costretto a muoversi in quel modo precisamente che conviene per la specie particolare di lavoro che si debbe eseguire. Per la macinatura de' grani, per esempio, ei dispone quel congegno che noi chiamiamo mulino, componendolo di tre parti principali, cioè:

1° Di una ruota a *pale*, o d'altra ruota idraulica destinata a ricevere il moto da una corrente o caduta d'acqua (1).

2° Di due ruote dentate (il *lubecchio* ed il *rocchetto*) fermate l'una sull'albero della ruota a pale o *stile*, l'altra sul *palo*, e destinate a trasmettere alla macina corsoia il movimento della ruota idraulica ed a modificarlo, facendo che la macina giri più presto o più adagio che la ruota, e giri in un piano orizzontale, anche quando la ruota idraulica gira in un piano verticale.

(1) Il lettore comprende, ch'io non intendo qui far la enumerazione di tutte le specie di mulini: fo quindi astrazione da quelli che sono mossi a forza di braccia, o da animali, o dall'azione del vento e del vapore, e non accenno che ai mulini più noti che son mossi dall'acqua.

3° Finalmente di due macine, l'una *giacente* o ferma, l'altra *corsoia* o mobile (dette anche il *fondo* ed il *coperchio*), che sono lo strumento che eseguisce il lavoro, riducendo il grano in farina.

36. « Dicesi *macchina* ogni congegno destinato a ricevere « movimento dall'azione di un motore, a modificare questo « movimento, e, così modificato, a trasmetterlo ad uno stru-« mento atto ad eseguire un lavoro qualunque ».

In ogni macchina, come nel mulino testè recato per esempio, si possono distinguere:

1° Una parte atta a ricevere l'azione diretta del motore, e questa parte si può chiamare generalmente il *primo mobile*.

2° Un numero più o men grande di parti, varie di natura e di forma, destinate a ricevere il moto dal primo mobile, a modificarlo trasmettendoselo dall'una all'altra, ed a comunicarlo finalmente allo *strumento;* tutte queste parti insieme si chiamano il *meccanismo*.

3° Finalmente, una o più parti destinate ad operare direttamente sulla materia che si vuol trasformare, cioè ad eseguire l'operazione che è lo scopo del lavoro, e a queste parti noi abbiamo dato finora e seguiteremo a dare il nome di *strumento*.

37. Sia che una macchina venga mossa dalla forza dell'uomo, o da quella di un motore privo d'intelligenza od anche di senso, essa accresce e moltiplica la umana potenza. La mano dell'uomo è, a vero dire, così artificiosamente organizzata, che si piega a mille complicatissimi movimenti, mercè de' quali può eseguire mille svariati lavori, ora brandendo con impeto la scure del taglialegne, ora guidando con maestria il pennello del pittore e il ferro del chirurgo: essa è una maravigliosa prova della infinita sapienza del Creatore; ma l'intelligenza umana, che è pur opera di Dio, è ancor più maravigliosa: e l'uomo immaginando una nuova macchina, infonde in essa, per dir così, un raggio della propria intel-

ligenza, per cui le opere più difficili e più gelose possono allora compiersi e più perfettamente, e più speditamente dalla forza manuale di un grossolano operaio, od anche dal ceco impeto di un animale o di un motore inanimato.

Quando l'orologiere taglia uno a uno con una lima i denticini d'una ruota; quando lo scrivano muove leggermente la penna sulla carta; tutta la loro attenzione è assorbita da operazioni, che non consumano la centesima parte della lor forza. Date all'orologiere una macchina conveniente, date allo scrivano un *torchio da stampatore;* affidate anche queste macchine ad uomini che nulla sappiano di orologieria o di scrittura, essi faranno in una giornata mila volte più lavoro, e lavoro migliore di quel che facessero l'orologiere e lo scrivano con l'uso diretto della mano. Ma non è luogo questo di trattenerci sui vantaggi delle macchine; torniamo allo studio delle loro parti.

38. Ogni macchina, noi già lo abbiam dichiarato, si compone di tre specie di parti: di un *primo mobile*, di un *meccanismo* e di uno *strumento*. Le condizioni da adempiere rispetto al primo mobile, a fine di applicare il motore nel modo più vantaggioso, cioè più economico e più efficace, appartengono alla *meccanica applicata*. Quelle che riguardano la scelta, la disposizione dello strumento appartengono alla *tecnologia*, e non possono essere suggerite che dalla conoscenza pratica di ciascun' arte, delle materie che essa impiega, dei fini ch'essa si propone. Ma la più acconcia disposizione del *meccanismo*, cioè di quelle parti della macchina, che servono a trasmettere il moto dal primo mobile allo strumento, ed a modificare, come si conviene per ciascun dato lavoro, questo moto, dipende unicamente dalla cinematica, e ci darà argomento di studio nel corso dell'opera presente.

Quantunque le cose dette fin qui possano bastare a far comprendere quale sia in generale lo scopo di qualunque meccanismo, pure per chiarezza maggiore, ricorriamo ancora ad alcuni esempli famigliari.

L'arrotino (*tav.* 1, *fig.* 9), premendo col piede una *stanga* o *pedale* AB, mette in giro una *mola* M, e questa girando contro la lama del coltello o d'altro ferro che l'arrotino vi tiene contro appoggiata, la morde, la rode, l'assottiglia, la affila.

Il motore è qui manifestamente il piede dell'operaio; il primo mobile è la *stanga;* lo strumento è la mola. Ma dov'è il *meccanismo?* Esso è semplice, ma necessario; esso consiste in quella corda o *tirante* BD, che propriamente dicesi il *nervo,* e che si lega di sotto al capo della stanga, e di sopra al bracciuolo DC del ferro o asse della mola. Ora che cosa fa questo meccanismo? Manifestamente esso comunica alla mola il movimento della stanga, ma non lo comunica senza modificarlo; il movimento della stanga è *alternativo*, quello della ruota è *continuo;* il movimento della stanga è lento, quello della circonferenza della ruota è veloce. Qui dunque il meccanismo composto del nervo e del bracciuolo trasmette il movimento dalla prima all'ultima parte della macchina, e nel trasmetterlo lo modifica.

Per trarre acqua da un pozzo con la secchia si impiega sovente un verricello (*tav.* 1, *fig.* 10). Il motore è qui la forza dell'uomo: il *primo mobile* è il manubrio AMN; lo *strumento* è l'uncino B al quale è attaccata la secchia; il *meccanismo* è composto di tre parti, cioè del *subbio* o *fuso* CD, della corda HGB e della girella G. Questo meccanismo comunica all'uncino il movimento del primo mobile, ed insieme lo trasmuta; poichè il moto del manubrio è circolare e quello della secchia è rettilineo, il moto del manubrio è celere e quello della secchia è lento.

Qui pure adunque, ed in ogni altra macchina, lo scopo, l'uso del meccanismo è di trasmettere il moto facendo intanto ch'ei soffra qualche modificazione.

39. Ora ricordandoci le distinzioni esposte nel capitolo secondo, ed osservando che il moto circolare, a cagione dell'uso frequentissimo che se ne fa in tutte le arti mecca-

niche, merita di essere distinto da ogni altro moto curvilineo, e di formare una classe da sè, noi potremo dire in primo luogo che un moto può essere

Rettilineo,
Circolare,
Curvilineo qualunque.

Poi, ricordandoci ancora che ciascuno di questi movimenti è o continuo od alternativo, invece di tre classi sole di movimenti, ne avremo sei, cioè:

Moto rettilineo — Continuo.
— Alternativo.
Moto circolare — Continuo.
— Alternativo.
Moto curvilineo qualunque — Continuo.
— — Alternativo.

Ora il movimento del primo mobile potendo appartenere ad una qualunque di queste classi, e quello dello strumento potendo similmente corrispondere, sia alla medesima classe, sia ad una qualunque delle altre, ne segue che l'uso di qualsivoglia meccanismo è sempre di produrre una delle trasformazioni indicate nel quadro seguente, oppure la modificazione inversa.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Il moto rettilineo continuo si trasforma in......... | Rettilineo | Continuo | (1) |
| | | Alternativo | (2) |
| | Circolare | Continuo | (3) |
| | | Alternativo | (4) |
| | Curvilineo | Continuo | (5) |
| | | Alternativo | (6) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Il moto circolare continuo si trasforma in ......... | Rettilineo | Alternativo | (7) |
| | Circolare | Continuo | (8) |
| | | Alternativo | (9) |
| | Curvilineo | Continuo | (10) |
| | | Alternativo | (11) |
| Il moto curvilineo continuo si trasforma in.......... | Rettilineo | Alternativo | (12) |
| | Circolare | Alternativo | (13) |
| | Curvilineo | Continuo | (14) |
| | | Alternativo | (15) |
| Il moto rettilineo alternativo si trasforma in.......... | Rettilineo | Alternativo | (16) |
| | Circolare | Alternativo | (17) |
| | Curvilineo | Alternativo | (18) |
| Il moto circolare alternativo si trasforma in.......... | Circolare | Alternativo | (19) |
| Il moto curvilineo alternativo si trasforma in.......... | Curvilineo | Alternativo | (20) |
| | Curvilineo | Alternativo | (21) |

In questo quadro noi abbiamo tenuto conto soltanto di quella varietà di movimenti che nasce dalla natura delle linee descritte e dalla direzione del moto: ma se si porrà mente che tanto il movimento del primo mobile, quanto quello dello strumento può essere equabile, oppure vario secondo qualunque legge, si vedrà che il numero delle quistioni che la cinematica applicata si propone di risolvere è infinito. — Noi procureremo nei prossimi capitoli di ridurre a certe regole questa infinita varietà di soluzioni e di fare l'applicazione di queste regole ai meccanismi di uso più frequente e più importante.

# CAPITOLO SETTIMO

## ORGANI MECCANICI.

40. L'immensa ed ogni giorno crescente varietà delle macchine usate nelle arti e nelle manifatture, potrebbe far credere che sia impossibile il passare a rassegna tutti i mezzi conosciuti di trasformare e di trasmettere il movimento, o per dir meglio, che questi mezzi sieno infinitamente varii. Ma se si prende a considerar più da vicino la composizione di ognuna di queste macchine, si trova che esse differiscono invero le une dalle altre pel fine cui sono destinate, per la materia di cui sono costrutte, pel numero e per la disposizione delle parti di cui sono composte; ma che queste parti sono presso a poco le stesse in tutte le macchine, e ponno ridursi ad un numero assai limitato. Qualunque sia il meccanismo che noi prendiamo ad esaminare, noi troviamo sempre che esso consiste in ruote, in manovelle, in tiranti, in puleggie, in cordoni, in viti ecc.; onde segue che per poter comprendere e saper descrivere il gioco di qualsivoglia macchina basta conoscere e ben comprendere il gioco di ciascuna di queste; e che l'invenzione di una nuova macchina non è altro che una ingegnosa combinazione di parti conosciute, ma disposte in un nuovo modo atto a produrre quell'effetto che l'inventore si propone. Queste parti di cui ogni meccanismo è composto, questi meccanismi semplici, che sono come i materiali comuni con cui tutte le macchine sono costrutte, si chiamano *Organi meccanici* od *Elementi delle macchine.* Essi stanno diligentemente raccolti ed ordinati ne' musei o conservatorii d'arti e mestieri, e trovansi descritti e rappresentati con figure in alcune opere a ciò particolarmente

destinate; se ne sono pure compilati de' grandi quadri in cui essi veggonsi ordinatamente disposti e disegnati, in modo da metterli tutti insieme innanzi agli occhi, e da suggerire ai meccanici l'uso ch'essi ne possono fare.

Noi li verremo descrivendo di mano in mano che svolgeremo i principii generali, dai quali dipende la spiegazione del loro modo di operare, cioè delle modificazioni che ognuno di essi vale a produrre nel movimento che per esso viene a trasmettersi. Tuttavia, sia come illustrazione di ciò che precede, sia come introduzione allo studio di que' principii generali, daremo nel presente capitolo una brevissima descrizione di alcuni organi meccanici, scegliendoli fra i più semplici, ed indicando per ciascuno la trasformazione di movimento che esso è atto a produrre.

Classi 1ª e 16ª. — *Trasformazione del moto rettilineo continuo in rettilineo continuo, e del moto rettilineo alternativo in rettilineo alternativo.*

41. Queste trasformazioni si fanno in modo semplicissimo per mezzo di una corda ACB ripiegata sopra uno spigolo smussato C (*tav.* 1, *fig.* 11), o meglio sopra una *girella fissa* C (*fig.* 12). Se al capo B della corda è attaccato un peso, esso prenderà un moto rettilineo della stessa specie e della stessa velocità di quello dell'altro capo A, al quale è applicata la forza motrice; ma le direzioni dei movimenti di A e B saranno differenti, e potranno essere parallele come nella *fig.* 13, o fare tra di loro un angolo qualunque come nella *fig.* 12. Quando s'impiega una girella sola, le due direzioni sono contenute nello stesso piano: ma con due o più girelle convenientemente disposte (*fig.* 14) il primo tratto AC e l'ultimo DB ponno condursi in piani comunque differenti. Finalmente se si vorrà che la velocità di B differisca da

quella di A, ciò pure si potrà ottenere mercè una conveniente disposizione di girelle, le une *fisse*, le altre *mobili*: nella *fig.* 15, per esempio, combinando la girella fissa C con la girella mobile D, la velocità di B riesce la metà solamente di quella di A.

Un altro meccanismo che è stato utilmente applicato per la trasformazione di cui parliamo, è rappresentato nella *fig.* 7 della *tav.* 3. AD, EF sono due *canne* o tubi perfettamente cilindrici che comunicano inferiormente col recipiente chiuso S. Questo recipiente e le due canne sono pieni d'acqua o d'altro liquido fino in GH ed in I: due *stantuffi* o *emboli* che compiono esattamente le sezioni delle canne, si appoggiano sulla superficie del liquido. Allora è chiaro, che se lo stantuffo GH si abbassa in *gh*, l'acqua contenuta nello spazio G*gh*H è costretta a passare nel recipiente S, ed un egual volume di acqua è forzato a passare dal recipiente S nella canna EF, ed a sollevare lo stantuffo I da I in *i*. Se le due canne fossero di egual diametro, o come suol dirsi, dello stesso calibro, la salita I*i* sarebbe precisamente eguale alla discesa G*g*, ma se il diametro EF è minore del diametro AD, allora la salita supera la discesa; e viceversa la discesa supera la salita se il diametro EF è maggiore del diametro AD.

Se invece di uno stantuffo si mettesse un *galleggiante* (1) nel tubo EF, a questo tubo si potrebbe dare una figura curvilinea qualunque, e scendendo lo stantuffo GI in linea retta, il galleggiante I salirebbe descrivendo la curva del tubo: così il moto rettilineo si troverebbe trasformato in un moto secondo una curva qualunque.

(1) Chiamasi *galleggiante* un corpo leggiero che sta a galla sull'acqua od altro fluido, come sarebbe un turacciolo di sovero, od una palla vuota di latta perfettamente chiusa da ogni parte, cosicchè l'acqua non vi possa entrare

Classi 3ª e 17ª. — *Trasformazione del moto rettilineo continuo in circolare continuo, e del moto rettilineo alternativo in circolare alternativo.*

42. La *dentiera* rettilinea BC (*tav.* 1, *fig.* 16) spinge i denti della ruota A e la fa girare con moto continuo o con moto alternativo, secondochè la dentiera medesima va con moto continuo od alternativo: in tutti i casi la velocità della circonferenza della ruota è eguale alla velocità della dentiera. Quando il moto della ruota dee mutar frequentemente direzione, cioè quando in ciascuna andata e in ciascuna venuta la ruota dee descrivere un arco minore della circonferenza, invece di una ruota intiera si può pure impiegare un *settore dentato*, come si vede nella *fig.* 17.

Alla dentiera rigida si sostituisce talvolta una dentiera articolata o catena dentata come quella rappresentata nella *fig.* 18: la ruota dentata si muta allora in una *rotella* o *girella*, intorno alla quale sono scolpite delle tacche nelle quali vengano ad incastrarsi i denti della catena. Si può anche impiegare una catena ordinaria, armando la circonferenza della rotella con cavicchie o uncinetti sporgenti che sieno aggrappati dagli anelli della catena (*fig.* 19).

Classe 7ª. — *Trasformazione del moto circolare continuo in rettilineo alternativo.*

43. Qui gli esempli sovrabbondano. Supponiamo in primo luogo che un disco circolare A (*tav.* 2, *fig.* 1) giri intorno al suo centro O: una *stanghetta* rettilinea BC, messa a contatto con la sua circonferenza e diretta secondo il prolungamento di un raggio, non riceverà dalla rotazione del disco verun movimento a motivo della perfetta eguaglianza di tutti i raggi del circolo. Ma se il disco invece di essere circolare fosse

tagliato secondo un'altra curva, come nelle *figg.* 2 e 3, oppure fosse bensì circolare, ma girasse intorno ad un punto O differente dal suo centro di figura, come nella *fig.* 4, allora è chiaro che supponendo la stanghetta caricata di un peso, o sospinta contro al disco dall'azione di una molla elastica, essa sarebbe costretta ora ad allontanarsi, ora ad avvicinarsi al centro di rotazione del disco, secondo che i raggi di questo vanno crescendo o diminuendo. Un tal meccanismo chiamasi un *eccentrico*, e noi vedremo a suo tempo che con una scelta conveniente della curva del disco è sempre possibile di fare che girando questo equabilmente, la stanghetta si muova essa pure equabilmente, oppure con moto accelerato o ritardato secondo qualsivoglia legge data. Io mi contenterò di osservare per ora che col circolo eccentrico della *fig.* 4 e col *cuore* della *fig.* 2 la stanghetta ad ogni giro farebbe una sola andata ed una sola venuta: mentre con la *rosetta a tre foglie o lobi* della *fig.* 3 si avrebbero tre andate e tre venute della stanghetta per ogni giro dell'eccentrico.

La *fig.* 8 della stessa tavola rappresenta il meccanismo comunemente usato per muovere i *pestoni* dei mulini da polvere, de' brillatoi da riso ecc. Un albero orizzontale KH porta infitti intorno intorno i *bocciuoli* P, P′, P″, i quali, mentre l'albero gira, vengono successivamente ad incontrarsi nello *sperone* TM, calettato orizzontalmente nel pestone EF, e sollevano questo sino ad una certa altezza, poi abbandonandolo, lo lasciano ricadere sulla materia contenuta nella *pila* R; ad ogni giro dell'albero tante sono le salite del pestone, quanti sono i bocciuoli distribuiti sulla circonferenza.

Se invece di un pestone verticale si dovesse muovere un *andivieni* orizzontale, questo dovrebbe essere sospinto dai bocciuoli tanto nell'andata come nella venuta: si potrebbe allora impiegare la disposizione rappresentata nella *fig.* 9, nella quale tre bocciuoli eguali B B′ B″ simmetricamente disposti in un medesimo piano intorno all'albero comune A, incontrano alternativamente i due speroni CC' posti diagonalmente alle due estremità del telaio EF, il quale viene spinto così or verso destra, or verso sinistra, e con esso anche le due parti della stanghetta SS, che scorrono entro i piegatelli P, P.

Merita ancora di essere qui descritto l'ingegnosissimo meccanismo della *fig.* 5. L'eccentrico ABC girevole intorno al suo vertice C è un triangolo curvilineo equilatero, i cui tre lati sono tre archi di circolo di 60°, descritti dai centri A, B, C. Il telaio EF ha la sua altezza interna precisamente eguale al raggio con cui gli archi dell'eccentrico sono stati descritti. Nella posizione rappresentata in figura, se si suppone che l'eccentrico giri pel verso della saetta, l'arco CB sospingerà il lato superiore del telaio finchè il punto B sia venuto sulla verticale del punto C: allora il telaio si fermerà e starà immobile finchè il punto A sia venuto esso nella verticale di C, nel quale istante l'arco CB comincierà a sospingere il lato inferiore del telaio e questo prenderà a discendere. Continuando lo stesso ragionamento si vedrà, che dividendo la rivoluzione dell'eccentrico in sei parti eguali, nella prima parte il telaio monterà, nella seconda starà fermo, nella terza discenderà, nella quarta tornerà a star fermo; poi risalirà nella quinta e starà fermo nuovamente nella sesta.

Classi 8ª e 19ª. — *Trasformazione del moto circolare continuo in circolare continuo, e del moto circolare alternativo in circolare alternativo.*

44. Queste trasformazioni, usate più che niun'altra in meccanica pratica, si compiono semplicissimamente per mezzo di due *puleggie*, sulle quali si avvolge una coreggia o corda senza capi, disposta in uno dei modi espressi nelle *figg.* 6 e 7 della *tav.* 2: con la prima disposizione le due puleggie girano pel medesimo verso, con la seconda esse girano per versi

contrarii. — Si può ancora sopprimere la corda o coreggia e avvicinare le due puleggie (alle quali meglio allora si darà nome di *ruote*) finchè le loro circonferenze si tocchino, cosicchè il moto si trasmetta dall'una all'altra per lo scambievole attrito (*fig.* 6). Quando l'attrito non basta a tramandare il movimento, le circonferenze delle due ruote si fanno dentate, come si vede nella *fig.* 11. Delle varie specie di ruote dentate e della forma che si dee dare ai loro denti, parleremo lungamente a suo tempo. Quando esse debbono servire a trasmettere un moto alternativo, invece di ruote intere si posson pure impiegare dai settori dentati, come quello della *tav.* 1, *fig.* 17.

Il tornio comune a pertica ci somministra un esempio famigliare della trasformazione di un moto circolare alternativo in altro moto circolare alternativo: la corda BCD (*tav.* 2, *fig.* 12), attaccata da una parte al pedale AB (detto dai tornitori toscani *asta*), e dall'altra alla pertica DE, dà uno o più giri morti intorno al pezzo C che si ha da tornire, se il tornio è a *due punte*, o, se è a *coppaia*, intorno a questa. Il tornitore spingendo il pedale all'ingiù, gli fa descrivere un arco di circolo intorno al suo punto d'appoggio A, e la corda discendendo fa girare il pezzo C pel verso della saetta: poi quando l'uomo solleva il piede, l'elasticità della pertica ritira la corda all'insù, il pedale si alza e il pezzo torna indietro girando a ritroso del suo moto precedente, e così di seguito con perpetua vicenda: il ferro fermamente appoggiato sulla *gruccia* o sull'*appoggiatoio*, intacca il lavorio nel moto diretto, e si rimane ozioso nel moto retrogrado.

### Classe 9ª. — *Trasformazione del moto circolare continuo in circolare alternativo.*

45. Le *palmole* (1) B, B′, B″ dell'albero o *stile* A (*tav.* 2, *fig.* 13) sospingono all'ingiù la coda CD del *maglio* MCD, la cui testa M si solleva e poi ricade sul tasso I, e così il moto continuo dell'albero produce nel maglio un moto alternativo intorno al punto C.

Nella *fig.* 21 A, B sono due ruote eguali, i cui denti si incastrano, cosicchè girando A con moto continuo da destra a sinistra, girerà B con simil moto da sinistra a destra: la ruota A porta con sè la mezza ruota dentata C, e la B porta la mezza ruota D così disposta, che quando la C incastra con la ruota E, la D rimane oziosa e viceversa. Risulta manifestamente da questa disposizione, che girando le ruote A, B con moto continuo, la ruota E girerà con moto alternativo.

### Classe 17ª. — *Trasformazione del moto rettilineo alternativo in circolare alternativo e viceversa.*

46. Il trapano a mano (*tav.* 2, *fig.* 14) e l'archetto (*fig.* 15), che entrambi servono ad imprimere un rapido moto alternativo di rotazione alle *saettuzze* impiegate dal magnano a forare il ferro ed altri metalli, ci somministrano due esempli famigliari della trasformazione del moto rettilineo alternativo in circo-

(1) Come il lettore avrà facilmente avvertito noi diam qui il nome di *palmola* allo stesso organo meccanico, al quale nel descrivere i molini da pestare abbiam dato quello di *bocciuolo;* riterremo quest'ultimo nome quando il meccanismo è destinato a produr moto rettilineo: adoprerem l'altro (quello di palmola) quando il moto prodotto è circolare.

lare alternativo. I due meccanismi delle *figg.* 16 e 17 servono così bene a questa trasformazione come alla trasformazione inversa. Nella *fig.* 16 AB è un'*asta* la quale scorrendo a guisa di *chiavistello* o di *paletto* entro gli *anelli* o piegatelli P, P, coll'andare innanzi e indietro, apre e chiude i parallelogrammi articolati BCC′DEE′FGG′, ritenuti da un perno fisso in F: quindi le branche FG, FG′ prendono intorno a questo perno un movimento circolare alternativo.

Nella *fig.* 17 AB è una *bilancia* mobile intorno all'asse C, e terminata da una parte da un arco di circolo DE descritto dal centro C: FI è una stanga verticale scorrevole contro a guide fisse GG; due coreggie o catene si attaccano, una nei punti D, I, l'altra nei punti E, F: quando l'arco DE gira verso sinistra, la coreggia DI tira la stanga, l'altra coreggia rimane inoperosa: viceversa, quando l'arco gira verso destra, la coreggia EF tira la stanga e l'altra si riposa. Questo meccanismo è stato sovente impiegato per dar movimento agli stantuffi delle trombe idrauliche. Alle due coregge sostituendo due dentature scolpite l'una nel filo della stanga, l'altra sull'arco della bilancia, il meccanismo si muterebbe in quell'altro che già abbiam descritto, e che è rappresentato nella *tav.* 1, *fig.* 17.

### Classe 9ª. — *Trasformazione del moto circolare alternativo in circolare continuo.*

47. Di questa trasformazione abbiamo già addotto un esempio nella mola dell'arrotino, nella quale abbiam fatto notare (*tav.* 1, *fig.* 9 e *tav.* 2, *fig.* 18) che il moto alternativo del pedale o stanga AB, per via del tirante o nervo BD, il quale può essere flessibile o rigido, si trasmette alla manovella DC, trasformandosi in moto circolare continuo: noi torneremo più tardi su questo meccanismo utilissimo, per dimostrarne le proprietà.

In questo esempio, come in tutti quelli che precedono, il moto prodotto è *permanente*, cioè non soffre interruzione veruna: la *fig.* 19 della *tav.* 2 rappresenta un meccanismo, per mezzo del quale un moto circolare alternativo permanente si cambia in moto circolare continuo intermittente.

Nel termine B della leva AB è unito a snodo l'*arpione* BD; muovendosi il punto A verso *a* ed il punto B verso *b*, l'arpione sospinge il dente D della ruota *dentata a sega* o ruota *di forza* G con cui s'aggrappa: tornando poi il punto A verso *a'*, ed il punto B verso *b'*, l'arpione dà indietro e va a mordere un altro dente per sospingerlo poi alla sua volta. Da ciò si vede che la ruota G si muove mentre il punto A cammina verso *a*, e rimane immobile mentre il punto A ritorna verso *a'*, epperò il suo moto è intermittente: anzi, per impedire che durante il ritorno del punto A in *a'* la ruota non indietreggi, si aggiunge il *nottolino* HI, il quale permette il movimento diretto della ruota, ma si oppone ad ogni moto retrogrado.

Disponendo il meccanismo, come si vede nella *fig.* 20, il nottolino è inutile, e la macchina gira, tanto nell'andata, come nella venuta della leva o *bilancia* AA': infatti, mentre uno dei due arpioni BD, B'D' va in cerca di un dente da aggrappare, l'altro spinge quello cui s'è appigliato, e la ruota non può mai dare indietro.

Io qui pongo fine a questa descrizione degli elementi delle macchine: il prolungarla di più sarebbe non meno inutile che fastidioso. Le cose vedute sono bastanti a dare un'idea de' mezzi di cui il meccanico pratico può valersi nella combinazione delle macchine, e per rendere intelligibili i principii generali e le regole che sto per esporre nei capitoli seguenti.

## CAPITOLO OTTAVO

### VARIO MODO DI AZIONE DEGLI ORGANI MECCANICI.

48. Poichè ogni organo meccanico, ogni elemento di macchina ha per uffizio essenziale di modificare il movimento trasmettendolo via via dal primo mobile fino allo strumento, di necessità esso dee contenere almeno due parti, due pezzi mobili, uno che dia il moto, l'altro che lo riceva: così nell'esempio della *tav.* 1, *fig.* 16 la ruota A girando mette in moto la dentiera BC; così nella *tav.* 2, *fig.* 2 il *cuore* AB sospinge l'andivieni o stanghetta CD: per brevità di discorsi in tutto ciò che segue, noi designeremo coi nomi di *pezzo conduttore* o di *movente* quella parte del meccanismo da cui procede il movimento, e con quelli di *pezzo condotto* o di *cedente* quella parte cui il moto si trasmette: così, per aggiungere un terzo esempio, nella *tav.* 2, *fig.* 5 il triangolo ABC è il *movente* o *pezzo conduttore*, il telaio DE è il *cedente* o *pezzo condotto.*

In questi tre esempli, e in quelli similmente delle *figg.* 8, 9, 11, 13, ecc. della *tav.* 2, il pezzo conduttore e il pezzo condotto si toccano l'un l'altro, sono in contatto immediato tra loro, e il movimento si trasmette direttamente dall'uno all'altro. Ma se prendiamo invece a considerare le due puleggie della *fig.* 6, o quelle della *fig.* 7, o il pedale AB e il cilindro C della *fig.* 12, noi vedremo che questi pezzi non sono in contatto immediato, ma si tramandano il movimento per mezzo di una corda o coreggia: e similmente nella *fig.* 16 il moto è trasmesso dal pezzo conduttore AB ai pezzi condotti FG, FG′ per via di una serie di spranghe rigide. Noi possiamo dunque stabilire una prima distinzione circa alla maniera con cui il moto si trasmette, dicendo che ciò può avvenire:

1° Per azione immediata.

2° Per azione mediata (1).

Esaminando poi attentamente le varie specie di parti intermedie di cui i meccanismi descritti nelle lezioni precedenti ci offrono esempli, noi le ridurremo a quattro generi, cioè: 1° i *tiranti*, 2° i *baltei* o *cingoli*, 3° i *fili duplicati* o *cappii*, 4° i *fluidi*.

Noi chiamiamo *tirante* ogni verga o spranga dritta o curva, unita a snodo nelle due estremità coi due pezzi tra i quali dee comunicare il movimento: l'arpione BD della *tav.* 2, *fig.* 19; le verghe BC, CE', E'G, BC', C'E, EG' della *fig.* 16 sono tiranti: daremo lo stesso nome ai fili ed alle corde flessibili, quando essi operano a modo di verghe rigide, cioè quando essi stanno tesi in linea retta in tutta la loro lunghezza, come la corda BD della *tav.* 1, *fig.* 9.

Quando all'incontro le corde, le treccie, le cinghie, le coreggie, le catene si piegano inviluppando la circonferenza di entrambi i pezzi che esse uniscono o di uno di essi soltanto, noi le chiamiamo *baltei* o *cingoli:* se ne hanno esempli nelle *figg.* 6 e 7 della *tav.* 2.

Che se uno dei pezzi che si vogliono congiungere sarà attaccato ad una estremità di un filo o di una corda, e l'altro pezzo si troverà tirato da uno o da più cappii del filo medesimo, diremo che la comunicazione del moto si fa per *cappii*

(1) Questa distinzione non è assolutamente rigorosa; infatti tra due parti contigue di un meccanismo vi ha sempre *contatto* ossia *azione immediata:* quando il moto si communica da una puleggia ad un'altra per via di una corda senza capi, si può dire che vi sono due meccanismi operanti per azione immediata, cioè uno composto della puleggia *movente* e della corda che fa uffizio di *cedente;* l'altro della corda stessa (che a vicenda fa uffizio di *movente*) e della puleggia condotta. Tuttavia noi conserviamo la distinzione indicata nel testo, la quale, introdotta dal signor Willis, ci sembra assai utile per la classificazione dei meccanismi, e la dimostrazione delle loro proprietà.

o per *raddoppiamento*. Così nella *tav.* 1, *fig.* 15, il *movente* o pezzo conduttore debbe intendersi attaccato in A, mentre l'uncino B, che è il pezzo condotto o cedente, è tirato da una corda raddoppiata o cappio.

Finalmente, per quel che è dei fluidi, già abbiamo spiegato nel capitolo precedente, e dimostrato nella *tav.* 3, *fig.* 7, in qual modo essi possano servire a trasmettere il movimento da uno stantuffo ad un altro stantuffo, o ad un galleggiante.

49. Tornando ora al caso dell'azione immediata, cioè a quei meccanismi ne' quali il movente e il cedente si toccano senz'alcun pezzo interposto, osserveremo, che quando due corpi si muovono toccandosi o appoggiandosi l'un contro l'altro, può avvenire, o che i due corpi si tocchino sempre nei medesimi punti, o che i punti di contatto si vadano variando sull'uno dei due corpi, o sopra entrambi. Nella prima supposizione uno dei due corpi fa ufficio di movente, l'altro di tirante, poichè il punto di contatto, essendo sempre il medesimo in entrambi i corpi, essi muovonsi come se in quel punto fossero tra di loro uniti a snodo; ma la seconda supposizione merita di essere particolarmente esaminata.

Quando la ruota C (*tav.* 1, *fig.* 8) gira appoggiandosi sul suolo, il punto di contatto varia continuamente e sulla circonferenza della ruota e sul terreno, cioè i due punti che nella posizione rappresentata in figura si confondono in O, col girar della ruota tosto si separano, e un altro punto $q$ della circonferenza viene ad applicarsi ad un nuovo punto Q del suolo. In questa specie di movimento l'arco O$q$ di cui tutti i punti sono venuti successivamente ad appoggiarsi sui punti corrispondenti della retta OQ, è di lunghezza precisamente eguale a questa retta, cosicchè la ruota tocca continuamente il suolo e rotola sopra di esso, senza che mai vi sia scorrimento o strisciamento. Si dice allora che la circonferenza della ruota si *sviluppa* sul suolo; onde questa specie di contatto sarà da noi designata sotto il nome di *contatto di sviluppo*. Se ne ha un altro esempio nelle due ruote della *tav.* 2, *fig.* 10: qui pure girando le ruote, i due punti che ora sono in contatto in T si separano, e vengono a toccarsi i due punti M, *m*, e gli archi TM, T*m*, di cui tutti i punti sono successivamente venuti a combaciare, sono della stessa lunghezza, onde l'uno non ha punto strisciato sull'altro, e le due circonferenze si sono semplicemente sviluppate l'una sull'altra.

La cosa succede ben diversamente negli *eccentrici* delle *figg.* 2, 3 e 4, *tav.* 2. Mentre infatti si fa girare il cuore della *fig.* 2, il contatto si trasporta sulla sua circonferenza da B in E, ma esso non cangia luogo mai sulla punta della stanghetta, cioè questa punta medesima viene successivamente a toccare ciascun dei punti dell'arco BE, il che non può avvenire senza che siavi *strisciamento, scorrimento* della punta sulla circonferenza del cuore; questa maniera di contatto noi la chiameremo dunque *contatto di scorrimento*. E notisi che acciò siavi scorrimento, non è già necessario che il punto di contatto sia rimasto assolutamente immobile sopra uno dei due corpi, ma solamente ch'esso siasi allontanato dalla sua prima posizione, meno sopra uno dei corpi che sull'altro. Supponiamo per esempio che il braccio curvo AMC (*tav.* 3, *fig.* 1) girando intorno al centro A, sospinga innanzi un braccio retto BD mobile intorno al centro B. Quando il primo sarà passato nella posizione AC′, il secondo sarà venuto in BD′; il contatto che prima aveva luogo in M si farà adesso in M′; e siccome i due punti che prima coincidevano in M saranno venuti, uno in *m* descrivendo l'arco M*m* intorno al centro A, l'altro in *m*′, descrivendo l'arco M*m*′ intorno al centro B, si vede che il contatto si sarà trasportato della quantità *m*M′ sul braccio curvo, e della quantità *m*′M′ sul braccio retto, e che tutti i punti compresi tra *m* ed M′ debbono essersi successivamente applicati sopra i punti compresi tra *m*′ ed M′. Ora essendo *m*M′ maggiore di *m*′M′, ciò non può essere avvenuto senza che vi sia stato scorrimento di uno dei due bracci sull'altro.

50. Nei meccanismi ne' quali la trasmissione si fa per azione immediata, noi siamo dunque in grado di distinguere due casi differenti, cioè la trasmissione per *contatto di sviluppo*, quando il contatto si trasporta egualmente sul *movente* e sul *cedente:* e la trasmissione per *contatto di scorrimento*, quando il punto di contatto si trasporta inegualmente sopra questi due pezzi.

Conchiudiamo adunque che i varii modi di azione dei meccanismi semplici, ossia degli organi meccanici si ponno ordinare come si vede nel seguente quadro:

| | | |
|---|---|---|
| La trasmissione del movimento si fa | Per contatto immediato | di sviluppo<br>di scorrimento |
| | Per azione mediata. . . | con tiranti<br>con baltei<br>con cappii<br>con fluidi. |

Nel capitolo precedente, seguendo le traccie di Lanz e Bettancourt, e della maggior parte degli scrittori di cinematica applicata, noi abbiamo distinti gli organi meccanici in vent'una classe, secondo la varietà delle trasformazioni di movimenti ch'essi sono atti a produrre. Nel capitolo presente abbiamo preso per guida il signor Roberto Willis, aggiungendo solo ai modi d'azione da lui considerati quello in cui il moto si trasmette per mezzo di un fluido. Si vedrà in tutto ciò che seguirà quale vantaggio e quanta semplicità risultino da questa maniera di ordinare gli organi meccanici secondo il loro vario modo di operare.

# CAPITOLO NONO

## TEOREMI FONDAMENTALI SULLA TRASMISSIONE DEL MOVIMENTO.

51. Esaminando con attenzione un meccanismo semplice, scorgesi, per lo più assai facilmente, quale sia la linea che dovrà descrivere un punto qualunque del pezzo condotto, quando s'imprimerà un certo movimento al pezzo conduttore; tutti gli esempli addotti nei capitoli antecedenti posson porgere la prova di ciò che qui affermiamo. Più difficile riesce molte volte il conoscere con quale *velocità* camminerà il pezzo condotto, quando il pezzo conduttore si muoverà con velocità nota, od in altre parole, l'assegnare la relazione che passerà tra la velocità del pezzo conduttore e quella del pezzo condotto. Ora questa conoscenza è indispensabile tanto a chi si propone di congegnare un meccanismo atto ad un determinato uso, quanto a chi vuole intendere perfettamente il gioco de' meccanismi immaginati da altri; noi darem dunque in questo capitolo le regole generali che conducono a determinare la velocità di qualunque punto di un meccanismo dato, quando si conosca quella di un altro punto determinato dello stesso meccanismo; i capitoli seguenti poi ci porgeranno continue occasioni di applicare queste regole ai casi particolari.

Osserviamo anzi tutto che la velocità assoluta di qualunque meccanismo è di sua natura indeterminata ed arbitraria, poichè sta sempre in nostra facoltà il far camminar presto o adagio il pezzo conduttore, e quindi anche tutti gli altri pezzi ai quali esso comunica il movimento; ma determinata che sia la velocità del primo pezzo, quella di qualsivoglia altra parte della macchina sarà pur determinata, e non dipenderà più che dalla particolar natura e disposizione del meccanismo. Quando noi caviamo acqua dal pozzo per mezzo di un verricello, è in nostro arbitrio il far che la manovella dia un giro in dieci minuti secondi, o in due, o in un solo. Ma qualunque sia il tempo che la manovella impiegherà a dar un giro, il fuso darà pure un giro nel medesimo tempo, e raccoglierà una lunghezza di corda eguale allo sviluppo della sua circonferenza, e tanta pure sarà l'altezza alla quale la secchia si solleverà. Se noi faremo girare la manovella due volte più presto o più adagio, e la secchia pure si muoverà due volte più presto o più adagio, che è quanto dire che la velocità della secchia sarà proporzionale a quella della manovella; od ancora, la ragione tra la velocità della secchia e quella della manovella sarà la stessa, sia che la macchina cammini adagio o presto.

Supponiamo, per esempio, che la circonferenza descritta dalla manovella sia di due metri, e quella del fuso di otto decimetri soltanto; ad ogni giro di manovella la secchia si alzerà di otto decimetri, e la manovella percorrerà due metri ossia venti decimetri; questi due spazii stanno tra loro come dieci al quattro, o come cinque al due, e siccome le velocità stanno pure fra di loro come gli spazi descritti nel medesimo tempo, la velocità della secchia sarà sempre i due quinti di quella della manovella, qualunque sia il tempo impiegato a fare un giro, e per conseguenza in questo semplicissimo meccanismo la ragione delle velocità sarà eguale a due quinti. Noi ci proponiamo di ricercare quale sia la *ragione delle velocità* in qualunque meccanismo immaginabile.

52. Osserviamo ancora che un meccanismo può essere così congegnato che la ragione delle velocità sia sempre la medesima in tutte le posizioni dei pezzi che lo compongono; oppure può esser tale che da una posizione all'altra la ragione delle velocità venga variando: un esempio schiarirà questa distinzione.

Il fuso del verricello, di cui ragionavamo testè, essendo cilindrico, la sua circonferenza è dappertutto della stessa lunghezza, e ad ogni giro la secchia si solleva egualmente, sia che la corda si raccolga presso alla estremità C del fuso, o presso l'altra estremità D (*tav.* 1, *fig.* 10). Ma se noi facessimo un verricello col fuso conico, cioè rastremato da una parte, se, dico, il fuso fosse conico (*tav.* 3, *fig.* 4), è chiaro che la circonferenza delle sue sezioni perpendicolari all'asse crescendo dall'estremo C sino in D, quando la secchia è in fondo al pozzo un giro di manovella la farà montar più, che quando essa sarà giunta presso alla bocca del pozzo; cioè, girando sempre la manovella egualmente presto, la secchia da principio si muoverà più velocemente, e poi sempre più lentamente. Conchiudiamo: la ragione delle velocità della secchia e della manovella verrà continuamente scemando; essa sarà *variabile*, mentre col fuso cilindrico questa ragione stava sempre la stessa, ossia era *costante*.

Si suol supporre, quando si esamina un meccanismo qualunque, che il suo pezzo conduttore si muova equabilmente; risulta allora che il moto del pezzo condotto sarà equabile oppure vario, secondochè il meccanismo avrà una *ragion di velocità* costante oppure variabile. Se questa ragione andrà crescendo, il moto del pezzo condotto sarà accelerato; se essa andrà diminuendo, il moto sarà ritardato, e sarà periodico quando la ragione delle velocità andrà ora crescendo, ora calando periodicamente, cioè quando le variazioni cui questa ragione andrà soggetta si riprodurranno in modo regolare ad eguali intervalli di tempo. Quest'ultimo caso avverrebbe per esempio con un verricello, il cui fuso fosse un cilindro ellittico; poichè girando un fuso siffatto equabilmente, ad ogni quarto di giro la velocità della secchia passerebbe dal suo valor *massimo* al suo valor *minimo* o viceversa, e sempre per gli stessi gradi, e ad eguali intervalli di tempo.

53. Veniamo ora alle proposizioni generali che abbiamo annunziate.

*Proposizione prima.* Intorno ai due centri fissi A, B muovansi i due bracci AP, BQ (*tav.* 3, *fig.* 2) congiunti dal tirante PQ di lunghezza invariabile, e siano PA$p$, QB$q$ i due angoli infinitamente piccoli descritti nello stesso tempo dai bracci AP, BQ, dimodochè il tirante PQ sia passato nella posizione $pq$ infinitamente vicina alla prima:

1° Prolungati i due bracci finchè concorrano in K, dico che le *velocità assolute* dei punti P, Q staranno tra di loro come le distanze PK, QK di questi punti dal punto K.

2° Condotta la *linea dei centri* AB dico ancora, che le *velocità angolari* dei bracci AP, BQ staranno tra di loro in ragion reciproca dei segmenti adiacenti AT, BT in cui la linea dei centri AB sarà divisa dal tirante PQ.

Infatti in virtù della proposizione prima del capitolo quinto, ed a motivo della picciolezza degli archi P$p$, Q$q$ il movimento del tirante da PQ in $pq$ potrà considerarsi come una semplice rotazione fatta intorno al punto K; gli archetti P$p$, Q$q$ sottenderanno dunque angoli eguali col vertice in K, e staranno per conseguenza nella ragione dei rispettivi raggi KP, KQ. Nella medesima ragione dovranno dunque stare anche le velocità assolute dei punti P, Q poichè esse sono proporzionali agli spazii P$p$, Q$q$ contemporaneamente descritti.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, dai quattro punti A, B, $p$, $q$ si abbassino sul tirante PQ le perpendicolari AH, BI, $pr$, $qs$; le due successive posizioni PQ, $pq$ del tirante facendo tra di loro un angolo infinitamente piccolo sarà $rs = pq = \mathrm{PQ}$ e per conseguenza

$$\mathrm{P}r = \mathrm{Q}s\,.$$

Riguardando poi gli archetti P$p$, Q$q$ come linee rette perpendicolari ai bracci AP, BQ, i due triangoli rettangoli APH,

$Ppr$ saranno simili tra di loro, nonchè i due altri BQI, $Qqs$, onde avremo

$$Pp : AP :: Pr : AH \ ,$$

$$Qq : BQ :: Qs : BI \ ;$$

ed a motivo di $Pr = Qs$

$$\frac{Pp}{AP} : \frac{Qq}{BQ} :: BI : AH \ ,$$

od a cagione dei triangoli simili AHT, BIT

$$\frac{Pp}{AP} : \frac{Qq}{BQ} :: BT : AT \ ,$$

che è ciò che si voleva dimostrare, poichè per essere AP, BQ i raggi con cui sono descritti gli archetti $Pp$, $Qq$, ossiano le distanze dei punti P, Q dai rispettivi loro centri di rotazione, i quozienti $\frac{Pp}{AP}$, $\frac{Qq}{BQ}$ sono proporzionali alle velocità angolari di questi due punti.

Nella figura, cui si riferisce la precedente dimostrazione, i due bracci AP, PQ sono uno da una parte, l'altro dall'altra del tirante PQ; se essi fossero entrambi dalla medesima parte, come si vede espresso nella *fig.* 3, *tav.* 3, le linee PQ, AB non si taglierebbero; ma prolungandole sufficientemente esse verrebbero ad incontrarsi in un punto T, e sarebbe sempre vero che le velocità angolari delle braccia AP e BQ starebbero in ragion reciproca delle distanze AT e BT (1).

(1) Il teorema dimostrato nel § 53 suppone, che gli assi di rotazione dei due bracci sieno tra di loro paralleli; ma esso può enunciarsi in termini più generali, in modo che si verifichi qualunque sieno le direzioni dei due assi, dicendo che:

54. L'enunciata proposizione e le conseguenze che se ne deducono sono pure applicabili alla comunicazione del moto per via di cingoli, ed alla comunicazione del moto per contatto immediato. Sieno AEPF, BLQM (*tav.* 3, *fig.* 5) due pezzi mobili intorno ai centri A, B, e connessi dal cingolo EPQM, fermato al primo pezzo in E, al secondo in M. Nella posizione rappresentata in figura il cingolo si applica sul lembo curvo EPF da E fino in P, e sull'altro lembo curvo LQM da M fino in Q; tra i punti P e Q esso è disteso in linea retta tangente alle due curve. Or se il pezzo conduttore AP si muove descrivendo un piccolissimo angolo intorno al punto A, il pezzo condotto BQ gli vien dietro descrivendo similmente un angolo piccolissimo intorno al punto B, e la trasmissione del moto si fa, per un istante, come se ne' punti P, Q il cingolo fosse fermato sui due pezzi mobili, per via di due chiodi. Tutto il meccanismo si muove dunque per un

Quando due bracci mobili intorno ad assi qualunque si conducono l'un l'altro per via di un tirante di lunghezza invariabile

1° Le velocità assolute delle due estremità del tirante stanno tra di loro come le loro distanze dalla comune intersezione dei due piani condotti ciascuno per una di queste estremità e pel rispettivo asse di rotazione.

2° Le velocità angolari dei due bracci stanno come le distanze suddette divise pei raggi dei circoli descritti dalle due estremità del tirante.

Dimostrasi osservando che quando una retta invariabile si muove in qualunque guisa nello spazio, descrivendo co' suoi due capi gli spazietti S, *s*, questo movimento può sempre riguardarsi come una rotazione fatta intorno alla comune intersezione dei due piani normali agli archetti S, *s*; or quando questi sono circolari i piani normali sono quelli che passano per gli assi dei due circoli, e le lunghezze S, *s* sono per conseguenza proporzionali alla loro distanza dalla comune intersezione di questi due piani, ossia intorno all'asse instantaneo della rotazione del tirante.

Anche i teoremi dei paragrafi 55, 56 sono suscettivi di essere in modo analogo generalizzati.

istante come se consistesse in due braccia AP, BQ, connesse da un tirante PQ, e resta così dimostrata la

*Proposizione seconda.* Quando due pezzi AEPF, BLQM (*tav.* 3, *fig.* 5) si trasmettono il movimento per via di un cingolo o balteo che ne abbraccia le circonferenze, le velocità angolari dei due pezzi in ciascuna posizione del meccanismo sono inversamente proporzionali ai due segmenti AT, BT, in cui la parte rettilinea PQ del balteo divide la linea dei centri AB.

Finalmente, siano AMF, BMG (*tav.* 3, *fig.* 6) due bracci curvi mobili intorno ai centri A, B, i quali bracci toccandosi nel punto M si trasmettano il movimento. Poichè le due curve si toccano, esse hanno comune la tangente LL′, e per conseguenza la retta NN′ perpendicolare ad LL′ sarà perpendicolare, o come dicono i geometri *normale* ad entrambe le curve; due archetti piccolissimi presi sulle due curve intorno al punto di contatto M, si possono considerare come due archi circolari, i cui centri saranno l'uno in P, l'altro in Q sulla comune normale NN′, e facendo muovere pochissimo le due braccia, il nuovo contatto si farà ancora in qualche punto dei medesimi archetti, e per conseguenza la distanza PQ non cangerà e sarà sempre eguale alla somma dei due raggi di curvatura PM, QM. Il moto si trasmetterà dunque tra le due braccia curve, precisamente come si trasmetterebbe per mezzo di un tirante PQ tra le due braccia rette AP, BQ, e la proposizione prima darà luogo alla seguente

*Proposizione terza.* Quando il moto si trasmette per via di contatto immediato (*tav.* 3, *fig.* 6), le velocità angolari del movente A e del cedente B stanno fra loro in ragione inversa dei segmenti AT, BT, in cui la linea dei centri AB resta divisa dalla linea PQ, cioè dalla comune normale NN′ allè due curve che si toccano.

55. Il medesimo principio serve adunque egualmente per determinare la ragione delle velocità, sia che il moto si trasmetta per mezzo di un tirante, di un cingolo o per immediato

contatto. Se noi chiameremo *linea d'azione* la direzione del tirante, del cingolo o della comune normale (nel caso del contatto), questo principio potrà generalizzarsi dicendo:

*In tutti i meccanismi, nei quali la comunicazione del moto si fa per tiranti, per cingoli o per contatto, le velocità angolari di due pezzi consecutivi stanno fra loro in ragione inversa dei segmenti in cui la* LINEA D'AZIONE *divide la* LINEA DEI CENTRI.

Da questo principio si deduce una importante conseguenza, che è poi il fondamento della teorica delle ruote dentate. *La ragione delle velocità angolari di due pezzi consecutivi di un meccanismo, si mantiene la medesima in tutte le posizioni di esso, purchè in tutte queste posizioni la linea d'azione incontri costantemente la linea dei centri nello stesso punto;* - oppure più generalmente: *girando il movente con moto equabile, il moto di rotazione del cedente è equabile, accelerato o ritardato, secondochè il punto in cui la linea de' centri è incontrata dalla linea d'azione, sta immobile, o s'avvicina al movente, o se ne scosta.*

56. Passiamo a ricercare la ragione delle velocità in quei meccanismi, in cui il moto si trasmette per via di *cappii*, cominciando dai casi più semplici.

Sia in primo luogo un filo ABCF (*tav.* 3, *fig.* 8) legato in una delle sue estremità al punto fisso F: formi esso un cappio coi due tratti paralleli e verticali AB, FC, sostenendo il peso P per mezzo della carrucoletta CB. Se l'estremità libera A del filo sarà tirata verticalmente all'insù dal pezzo conduttore, la carrucola ed il peso, che forman qui il pezzo condotto, saranno sollevati. Supponiamo che il diametro orizzontale BC si sia così trasportato in *bc*, e pel punto F conduciamo l'orizzontale FE. Egli è manifesto che, mentre la carrucola è venuta di BC in *bc*, i due tratti EB, FC si sono accorciati entrambi di una quantità eguale a B*b*, cioè di tanto, quanto si è sollevato il peso. Ora la lunghezza intera del filo ABCF essendo invariabile, tutta quella parte di filo che non è più compresa fra le orizzontali *bc*, FE dee essere passata al di sopra di quest'ultima, trasportandosi il punto A in $a$ col descrivere uno spazio $Aa$ eguale alla somma degli accorciamenti $Bb$, $Cc$ dei due tratti, cioè doppio della salita del peso P. La velocità del punto A è dunque doppia di quella del peso P.

La velocità del punto A sarebbe ancora la stessa, se il tratto BA invece di stendersi in linea retta si piegasse in qualunque luogo sopra una girella fissa D, prendendo una direzione qualunque DA'.

Applicando lo stesso ragionamento alla disposizione della *fig.* 9, nella quale i tratti paralleli che tirano la carrucola ed il peso P sono tre, ed a quella della *fig.* 10, in cui i tratti sono quattro, si comprenderà facilmente che nella prima la velocità del punto A sarà tripla di quella del peso P, e che nella seconda essa sarà quadrupla; onde già potremo conchiudere che:

Quando un punto P è tirato da qualsivoglia numero di cappii, i cui tratti sono tutti paralleli, e si muove parallelamente alla direzione di questi tratti, la velocità del tratto libero, ossia della *vetta*, è tante volte maggiore di quella del punto P., quanti sono i tratti che formano i cappii.

Torniamo adesso al caso di un cappio solo, ma fingiamo che i suoi due tratti CF, CB (*tav.* 3, *fig.* 11) comprendano tra di loro un angolo qualunque, e che il pezzo condotto C sia costretto in qual siasi modo a seguire nel suo movimento una direzione data CE.

Quando questo pezzo sarà venuto in $c$ percorrendo lo spazio $Cc$, che dee supporsi infinitamente piccolo, ed i due tratti CF, CB saranno passati nelle posizioni $cF$, $cB$ infinitamente poco differenti dalle prime; abbassate da $c$ le perpendicolari $ch$, $ci$ sopra CF, CB, sarà, senz'errore apprezzabile $Fc=Fh$ e $Bc=Bi$ e per conseguenza $Fc+cB=Fh+Bi$, onde la parte del filo compreso tra i due punti F e B si sarà accorciata della quantità $Ch+Ci$. Ma il filo supponendosi di lunghezza invariabile, tutta quella parte di esso, che più non cadrà tra i punti F e B, sarà passata al di là del punto B, epperò il pezzo conduttore che era in A si sarà avanzato verso *a* della quantità $Ch + Ci$; staranno dunque le velocità di C e di A come $Cc : Ch + Ci$, ossia come una lunghezza qualunque presa sulla direzione del pezzo condotto sta alla somma delle proiezioni della lunghezza medesima fatte sulle direzioni dei due tratti del *cappio*.

In modo affatto analogo si dimostrerà la seguente proposizione generale:

*Proposizione quarta.* Quando il pezzo condotto C è tirato da quanti si vogliano cappii FCB, B'CB'', B'''CB$^{\text{IV}}$ (*tav.* 3, *fig.* 12), e costretto a seguire una direzione data CE, la sua velocità sta a quella del pezzo conduttore, come una lunghezza qualunque, presa ad arbitrio sulla direzione data, sta alla somma delle proiezioni di questa lunghezza medesima, fatte sulle direzioni di tutti i tratti che tirano il pezzo condotto (1).

57. La trasmissione del moto per mezzo di fluidi incompressibili ha qualche analogia con quella che si fa per via di cappii. Quando lo stantuffo GH (*tav.* 3, *fig.* 7) si abbassa in *gh*, e caccia nel recipiente S il liquido che era contenuto nello spazio GH*hg*, un egual volume di liquido è costretto ad uscire dal recipiente e ad entrare nella canna EF sollevando lo stantuffo I fino in *i*; quindi la capacità della canna EF tra i punti I, *i* debb'essere eguale alla capacità della canna AD tra le sezioni GH, *gh*. Se le due canne sono prismatiche o cilindriche, affinchè sieno eguali i due volumi I*i*, GH*hg*, è necessario che le loro altezze sieno inversamente proporzionali alle loro basi, cioè alle sezioni delle due canne; se, per esempio, la sezione di AB è nove volte più grande

(1) Siano U, *u* le velocità del *movente* e del *cedente* $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, ..... gli angoli che la direzione CE del movimento di questo fa coi tratti CF, CB, CB'..... del filo: sarà

$$u = \frac{U}{\cos\alpha + \cos\alpha' + \cos\alpha'' \ldots\ldots}$$

in superficie che quella di EF, la salita I*i* sarà nove volte maggiore della discesa G*g*, e la velocità dello stantuffo cedente I, nove volte più grande che la velocità dello stantuffo movente GH. Così succederebbe se il diametro GH fosse tre volte maggiore del diametro I.

Conchiudiamo dunque con lo stabilire un'ultima proposizione, cioè:

*Proposizione quinta.* Quando il moto si trasmette per mezzo di un liquido contenuto in due tubi prismatici o cilindrici, le velocità assolute dello stantuffo movente e dello stantuffo cedente, o del galleggiante che tiene il luogo di questo, sono inversamente proporzionali alle sezioni dei due tubi in cui essi si muovono.

Non sarà inutile l'osservare che, se il tubo EF non fosse tutto d'egual sezione, ma venisse da un luogo all'altro allargandosi e stringendosi, mentre lo stantuffo GH discende equabilmente, il galleggiante I non salirebbe con moto equabile, ma ad ogni istante la sua velocità sarebbe inversamente proporzionale all'area della sezione occupata in quell'istante dalla superficie superiore del liquido.

# CAPITOLO DECIMO

## DEI CUNEI E DELLA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA O GRAFICA DEL MOVIMENTO.

58. Per seguire nella applicazione de' teoremi dimostrati nel capitolo precedente il medesimo ordine che abbiam tenuto nella dimostrazione di essi, noi dovremmo ora prendere a considerare prima d'ogni altro i meccanismi ne' quali il movimento si trasmette per via di tiranti. Ma noi verremmo, così facendo, ad incontrare fin dai primi passi alcune difficoltà che più facilmente saranno da noi superate allorquando la disamina di altri men complicati congegni ci avrà aperta la via; e perderemmo la opportunità di esporre qui nel modo che ci sembra insieme il più naturale ed il più chiaro i metodi geometrici atti a rappresentare con figure le particolarità del movimento, in guisa da rendere manifeste le vicende tutte alle quali la direzione e la velocità di esso possono andar soggette; il qual metodo ci tornerà in tutto il corso del nostro studio di sommo vantaggio.

Chiamasi ordinariamente *cuneo*, *conio* o *bietta* un prisma triangolare, per lo più assai aguzzo (*tav.* 3, *fig.* 13), i cui spigoli A*a*, B*b*, C*c*, hanno poca lunghezza rispetto ai lati della base ABC; ma noi daremo alla parola *cuneo* un significato assai più esteso, chiamando con questo nome ogni solido prismatico retto B*a*C (*tav.* 4, *fig.* 10) che abbia per base il triangolo rettilineo o mistilineo ABC rettangolo in B, qualunque sia la linea AC retta o curva; anzi in tutto ciò che segue faremo sempre astrazione dalla spessezza A*a* del cuneo, che si troverà così ridotto al semplice piano ABC. Noi supporremo sempre questo piano collocato verticalmente col lato AB orizzontale; chiameremo questo lato la *base*, ed il lato BC l'*altezza del cuneo*;

la linea AC poi, retta o curva che sia, la diremo il *filo del cuneo*.

Ciò posto consideriamo in primo luogo il cuneo di filo retto ABC (*tav.* 4, *fig.* 11), appoggiato con la sua base sulla guida orizzontale HH' sulla quale può scorrere liberamente; e sia MN una *stanghetta* o *andivieni* verticale, mobile entro ai *piegatelli* p, p', cosicchè in virtù del proprio peso, ovvero per la reazione di una molla RN, continuamente s'appoggi con la sua punta M sul filo del cuneo.

Quando si sospingerà il cuneo equabilmente sulla sua guida da destra a sinistra, la stanghetta MN verrà sollevata, ed il moto rettilineo orizzontale del cuneo si troverà così trasformato in un moto rettilineo verticale della stanghetta.

Sulla base del cuneo AB, e partendo dal punto A, portiamo le lunghezze AQ, QQ', Q'Q''...., eguali tra loro, ed eguali allo spazio descritto dal cuneo nella unità di tempo, che sarà per esempio il minuto secondo; e nei punti Q, Q', Q''..... innalziamo le verticali QM, Q'M', Q''M''..... sino all'incontro della linea del filo AC; finalmente pei punti M, M'...., conduciamo le orizzontali Mq', M'q''..... Egli è evidente che se al principio del movimento la punta A del cuneo e quella della stanghetta si trovavano entrambe in Q, avanzandosi il cuneo in un minuto secondo della quantità AQ, la stanghetta si sarà innalzata della quantità QM; e che similmente nel secondo, nel terzo minuto essa avrà percorse verticalmente altezze eguali alle linee q'M', q''M''. Ora i triangoletti AQM, Mq'M', M'q''M'' sono tutti eguali tra loro, epperò le loro altezze QM, q'M', q''M'' sono anche tutte eguali; la stanghetta avrà dunque descritti spazii eguali in eguali e successivi intervalli di tempo, cioè il suo movimento sarà stato equabile, e poichè le velocità di due corpi che muovonsi equabilmente stanno fra loro come gli spazii da essi descritti nello stesso intervallo di tempo, la velocità della stanghetta starà a quella del cuneo, come MQ sta ad AQ, o come l'altezza BC del cuneo sta alla sua base AB. Alla sola vista del filo rettilineo AC del cuneo e della sua inclinazione sulla base AB, noi possiam dunque immediatamente giudicare che il moto della stanghetta sarà equabile, e possiamo anche determinare la ragione della sua velocità a quella del cuneo.

59. Che questa ragione debba essere eguale a quella di BC:AB può anche facilmente dedursi dalla proposizione prima (§ 53) del capitolo precedente. Poichè ogni retta definita potendosi riguardare come parte di una circonferenza di circolo di raggio infinitamente grande, il moto rettilineo del cuneo ABC può considerarsi come un moto circolare fatto intorno ad un centro collocato a distanza infinita sul prolungamento della retta M'Q'O perpendicolare alla direzione H'H di quel moto; e per egual ragione il moto rettilineo della stanghetta MN si può avere per un moto circolare fatto intorno ad un centro collocato a distanza infinita sul prolungamento della retta orizzontale $q'$ML. Tirando dal punto M la retta MO perpendicolare al filo del cuneo, sarà dessa la *linea d'azione* del cuneo sulla stanghetta, e quindi a questo meccanismo si potrà col pensiero sostituirne un altro formato di due bracci infinitamente lunghi, l'uno verticale, l'altro orizzontale, e connessi tra loro per via di un tirante MO. Le direzioni prolungate di questi due bracci s'incontrano in $q'$, e quindi, in virtù di una delle citate proposizioni, le velocità assolute dei punti O ed M, cioè del cuneo e della stanghetta, stanno fra loro come le distanze $q'$O e $q'$M. Ma il triangolo M$q'$O è simile al triangolo M'$q'$M ed al triangolo ABC, perchè ha i suoi lati rispettivamente perpendicolari a quelli di questi due triangoli; dunque finalmente la velocità assoluta del cuneo sta a quella della stanghetta come M$q'$ : M'$q'$, oppure come AB : BC.

Percorrendo il cuneo in ciascun minuto secondo la lunghezza di una delle divisioni eguali AQ, QQ', Q'Q''...., il tempo trascorso dopo il principio del movimento ci sarà indicato dal numero di queste divisioni che saranno passate sotto alla punta M della stanghetta; onde la base del cuneo sarà per noi come un quadrante d'orologio, sul quale il prolungamento della stanghetta farà da lancetta e ci indicherà il tempo, e per questa ragione la base del cuneo potrà da noi chiamarsi la *linea dei tempi*. Nella *fig.* 11, *tav.* 4 la posizione della stanghetta c'indica che il movimento non ha durato ancora che un solo minuto secondo, mentre nella *fig.* 2, *tav.* 5 si vede ch'esso già dura da due secondi e mezzo.

In tutto ciò che segue ci sarà assai comodo il supporre, che lo spazio AQ percorso dal cuneo nella unità di tempo sia eguale alla linea che si prende per unità di lunghezza, per esempio, al decimetro; poichè allora la velocità del cuneo sarà eguale alla unità di velocità, e quella della stanghetta si avrà dividendo l'altezza del cuneo per la sua base, oppure misurando l'altezza $M'q'$ di cui essa sollevasi mentre il cuneo descrive uno spazio eguale a QQ'.

60. Se al cuneo semplice della *fig.* 11, *tav.* 4 si sostituisce adesso quello rappresentato nella *fig.* 12, si comprende senza difficoltà che partendo dall'istante in cui il punto A si trova sotto la stanghetta, questa sale equabilmente per tutto il tempo indicato dalla lunghezza AA', e sale con velocità eguale ad $\frac{A'C'}{AA'}$. Poi la stanghetta comincia a discendere con la velocità $\frac{C'D}{A'A''}$, e discende per tutto il tempo indicato dalla lunghezza della base A'A''; poi finalmente risale per tutto il tempo A''B con velocità $\frac{CD'}{A''B}$.

Che se una porzione del filo del cuneo fosse orizzontale, come nella *fig.* 13 della *tav.* 4, e nelle 1 e 2 della *tav.* 5, la stanghetta avrebbe un tempo di riposo; così col cuneo della *fig.* 1 essa comincerebbe a salire, poi starebbe ferma pel tempo corrispondente alla lunghezza A′A″, poi prenderebbe a discendere, cioè vi sarebbe un *riposo* fra una salita e una discesa; col cuneo della *fig.* 2 all'incontro, la fermata si farebbe fra una discesa e una salita, e con quello della *fig.* 13, *tav.* 4 fra due salite.

Ogni volta dunque che il filo del cuneo sarà composto di linee rette, il movimento della stanghetta sarà composto di una serie di movimenti equabili, fatti per versi e con velocità differenti; vi sarà cangiamento di velocità tutte le volte che il filo del cuneo farà un angolo; vi sarà cangiamento di direzione tutte le volte che il filo dopo di essere stato ascendente diverrà discendente o viceversa; e non s'incontrerà mai difficoltà nel determinare la durata e la velocità di ciascuno di questi movimenti.

61. Vediamo adesso ciò che avverrà quando il filo del cuneo non sarà nè retto, nè composto di linee rette, ma curvilineo, e cominciamo dal caso della curva concava della *fig.* 3, *tav.* 5. Sieno sempre AQ, QQ′, Q′Q″ ecc., gli spazii eguali fra loro, ed eguali alla unità di lunghezza descritti dal cuneo nelle successive unità di tempo. Alzando qui pure le verticali QM, Q′M′, Q″M″, e tirando le orizzontali M*q*′, M′*q*″ ecc., saranno QM, *q*′M′, *q*″M″, .... gli spazii descritti dalla stanghetta nella prima, nella seconda, nella terza unità di tempo. Ma questi spazii non sono più eguali tra di loro, anzi vanno manifestamente crescendo; dunque la stanghetta non correrà più con moto equabile, ma sempre più presto, cioè con velocità crescente; in altre parole il suo moto sarà accelerato.

Ragionando allo stesso modo sulla *fig.* 4, *tav.* 5, si vedrà che quando il filo del cuneo sarà convesso, il moto della stanghetta sarà ritardato; parlo del moto ascendente, poichè è manifesto che se invece di salire su per le curve AC delle *figg.* 3 e 4, la stanghetta discendesse per le curve medesime, il suo moto sarebbe ritardato nel caso della curva concava, ed accelerato nel caso della curva convessa. Se poi la curva presenterà un *punto culminante*, come O (*fig.* 5), il moto sarà ritardato nella salita, poi accelerato nella discesa; e se la curva avrà un punto d'*avallamento* (*fig.* 6), il moto sarà ritardato nella discesa, poi accelerato nella salita.

Ma una curva può essere in parte concava, ed in parte convessa (*figg.* 7 e 8), e vi ha allora un punto O dove la convessità e la concavità vengono a riunirsi, e in cui non si può dire che la curva sia nè concava, nè convessa. Un tal punto dicesi *punto di flesso*, e quivi la tangente (che può essere orizzontale come nella *fig.* 7, oppure inclinata come nella *fig.* 8) ad un tempo tocca e taglia la curva, e con essa sensibilmente si confonde per un tratto più esteso che in qualunque altra parte della curva. In un tal punto il moto, di accelerato si fa ritardato, o di ritardato accelerato, e può per alcuni istanti riguardarsi come equabile, se la tangente è inclinata, o come nullo se essa è orizzontale, poichè la punta della stanghetta si muove come se invece di appoggiarsi sulla curva del filo del cuneo, si appoggiasse sulla sua tangente.

Ma in tutti i casi in cui il filo del cuneo è curvilineo, come potrem noi conoscere ad ogni istante il valore della velocità della stanghetta, velocità che all'istante seguente già sarà più grande o più piccola? Un po' di riflessione ce ne farà subito scorgere il mezzo, col condurci a generalizzare l'osservazione ora fatta rispetto alla tangente.

Ogni curva si può riguardare come un poligono formato di una infinità di lati infinitamente piccoli, ciascuno dei quali si confonde con un archetto della curva; la tangente viene allora riguardata come il prolungamento di uno di questi lati, epperò quando un punto si muove appoggiandosi sempre sopra una data curva, il suo moto in ciascuno istante infinitamente breve è precisamente lo stesso, come se per quell'istante esso si appoggiasse, non sulla curva, ma sulla tangente. Se dunque la stanghetta sarà pervenuta nella posizione MN (*fig.* 9) e vorremo conoscere la sua velocità in quell'istante, alla destra della verticale MQ che passa pel punto M, ed alla distanza QQ' eguale allo spazio descritto dal cuneo nella unità di tempo, ossia alla velocità del cuneo, noi condurremo la verticale indefinita Q'R; poscia pel punto M tireremo la tangente MT, e la orizzontale $Mq$ fino ad incontrare la verticale QR; la parte $qt$ intercetta su questa verticale tra i due punti d'incontro sarà la giusta misura della velocità della stanghetta, all'istante proposto (1).

Ripetendo sopra un cuneo curvilineo (*fig.* 9) i medesimi ragionamenti, che nel § 59 abbiamo fatti sopra un cuneo di filo retto, si scorgerà che qualunque sia la curva del filo del cuneo, l'espressione ora trovata della velocità della stanghetta risulta pure come conseguenza dei teoremi generali del capitolo precedente; poichè condotta in M la MO perpendicolare alla tangente MT, o come dicono, la *normale* alla curva, la velocità del cuneo dovrà stare a quellla della stanghetta $:: qO : qM$, ossia $:: qM : qt$; epperò essendo $qM$ la velocità del cuneo, sarà $qt$ quella della stanghetta.

62. Non vi ha dunque vicenda alcuna del movimento della stanghetta, che non sia chiaramente indicata dall'andamento della curva che forma il filo del cuneo; poichè data questa curva, noi veniam tosto a conoscere quali debbano essere alla fine di qualsivoglia tempo, lo spazio descritto dalla stanghetta, il verso del suo movimento e la sua velocità. Questa curva è dunque come una puntuale descrizione, come una immagine fedele di tutti gli accidenti del suo moto; e per dare una chiara e perfetta idea di qualunque movimento rettilineo, il miglior mezzo che possiamo impiegare sarà appunto di presentare delineata la figura del cuneo che varrebbe a produrre quel movimento, quantunque esso sia stato in fatti prodotto in qualsivoglia altra maniera. La qual figura si costruirà disegnando una curva, nella quale (*fig.* 3 e 4)

(1) Veggasi la nota alla fine del capitolo.

le perpendicolari QM, Q'M', Q''M''..... sieno proporzionali agli spazii descritti dal mobile, ne' tempi che sono numericamente rappresentati dalle distanze AQ, AQ', AQ''.....

Per abbreviare i discorsi, i geometri chiamano *ascissa* una distanza qualunque come AQ misurata sulla linea AB, partendo da un punto A che si prende per *origine;* ed *ordinata* la perpendicolare QM innalzata sulla AB nel punto Q. Così si dice che AQ e QM sono l'ascissa e l'ordinata del punto M, e che AQ' e Q'M' sono l'ascissa e l'ordinata del punto M'.

Ammettendo queste denominazioni, le cose esposte fin qui si riepilogheranno in poche parole dicendo, potersi rappresentare geometricamente un movimento rettilineo qualunque per mezzo di una curva, di cui le ascisse sieno proporzionali ai tempi, e le ordinate sieno proporzionali agli spazii descritti; e, data una tal curva, potersi facilmente e senza rischio di errore riconoscere tutte le vicende del movimento da essa rappresentato.

63. Vogliasi a cagion d'esempio rappresentare il moto verticale di un corpo pesante che cade nel vacuo, cioè senza incontrare veruna resistenza; in questo moto, siccome già abbiamo accennato nel § 13, gli spazii descritti nel primo, nel secondo, nel terzo, nel quarto minuto secondo, stanno tra di loro come i numeri dispari 1 : 3 : 5 : 7 ; .... e per conseguenza gli spazii descritti in uno, in due, in tre, in quattro minuti secondi contati facendo capo dal primo istante della caduta, vengono crescendo come i numeri 1 : 4 : 9 : 16 ..., cioè come i quadrati dei tempi. Si rappresenterà dunque questo movimento, col descrivere una curva (*fig.* 3) in cui le ordinate QM, Q'M', Q''M''..... che rappresentano gli spazii vadano appunto crescendo secondo la progressione 1 : 4 : 9 : 16...., mentre le corrispondenti ascisse AQ, AQ', AQ''..... che rappresentano i tempi formano la progressione 1 : 2 : 3..... (1).

(1) Gli spazii successivamente descritti nei tempi uguali rappresentati

Questa curva, che appartiene alla specie di quelle alle quali i geometri hanno dato il nome di *parabola ordinaria*, gode di questa proprietà, che conducendo nei punti M, M′, M″.... le tangenti Mt′, M′t″, M″t‴...., le distanze t′M′, t″M″, t‴C...., le quali rappresentano le velocità del mobile alla fine dei tempi 1 : 2 : 3...., si troveranno crescere secondo la progressione medesima 1 : 2 : 3...., per modo che sarà $t''M''=2\,t'M'$, $t'''C''=3\,t'M'$....; onde concluderemo che nel moto verticale de' corpi cadenti le velocità vengono crescendo proporzionalmente ai tempi, ossia che quel movimento è *equabilmente* accelerato.

64. Supponiamo ancora che ci si domandi quale è la natura del movimento rappresentato dalla curva, di cui si vede disegnato un tratto nella *fig.* 10.

Noi osserveremo:

1° Che questa curva ora s'innalza, ora si abbassa, che essa ha dei punti culminanti O, O′ ecc. e dei punti di avallamento R, R′ ecc.; onde già possiamo concludere che il moto ch'essa rappresenta è un moto ora ascendente, ora discendente, cioè che è un moto alternativo.

2° Che le altezze od ordinate PO, P′O′, .... dei diversi punti culminanti sono tutte eguali tra loro, e similmente che le altezze o ordinate SR, S′R′..... dei punti di avallamento sono pure tutte eguali tra loro; e da ciò concluderemo che il mobile in tutte le sue salite si solleva egualmente, e che si abbassa egualmente in tutte le sue discese, cioè che tutte le sue corse ascendenti e discendenti sono eguali.

3° Che gl'intervalli PS, SP′, P′S′ ecc., tra un punto culminante, ed il punto d'avallamento consecutivo, o tra un

dalle distanze AQ, QQ′, Q′Q″, Q″B..... formano manifestamente una serie, i cui termini crescono come i numeri 1, $4-1=3$, $9-4=5$, $16-9=7$, .... cioè come la serie dei numeri impari 1 : 3 : 5 : 7.... Abbiasi presente questa osservazione, che ci tornerà utile nel capitolo seguente.

punto d'avallamento e il punto culminante seguente, sono tutti eguali tra di loro, cioè che il tempo impiegato in ciascuna discesa ed in ciascuna salita è sempre il medesimo.

4° Che se partendo dai punti P, P′ corrispondenti ai colmi O, O′, noi portiamo sulla linea dei tempi le distanze eguali PQ, P′Q′ e nei punti Q, Q′ innalziamo le perpendicolari od ordinate QM, Q′M′, queste due ordinate sono eguali, e che di più le tangenti condotte alla curva nei punti M, M′, hanno la medesima inclinazione, cioè sono parallele; il che prova che il moto discendente del corpo, nel tempo rappresentato dall'intervallo PS, è in tutto eguale al moto discendente dello stesso corpo, nel tempo rappresentato dall'intervallo P′S′; od in altre parole ancora, che la legge del movimento è la medesima in tutte le corse discendenti. Lo stesso si potrebbe pur dire per eguale ragione di tutte le corse ascendenti, e si esprime dicendo che il moto è *periodico*, poichè questa parola significa appunto che ad eguali e successivi intervalli o periodi di tempo la velocità torna a riprendere precisamente la stessa direzione e la stessa grandezza.

5° Finalmente potremo osservare, che tra il punto di avallamento R e il punto culminante O′ la curva è prima concava e poi diventa convessa; e viceversa tra il punto culminante O′ ed il punto di avallamento R′, la curva è prima convessa e poi diventa concava, la qual cosa ci dimostra che il moto ascendente ed il moto discendente sono entrambi accelerati da principio e ritardati verso il fine.

Io non istarò a fare una analisi egualmente minuta dei movimenti rappresentati nelle *figg.* 11, 12 e 13; e tuttavia io spero che coloro che avranno lette attentamente e ben considerate le cose dette finora e l'esempio precedente, non peneranno a riconoscere nella curva della *fig.* 11 l'immagine di un movimento *alternativo* ma non *periodico*, nella *fig.* 12 quella di un movimento *periodico*, ma non *alternativo*, e finalmente nella curva della *fig.* 13 la rappresentazione di un movimento alternativo molto più regolare che quello della *fig.* 11, ma nel quale le corse ascendenti e discendenti invece di essere tutte eguali come quelle rappresentate nella *fig.* 10, vanno continuamente crescendo di ampiezza, facendosi tuttavia in tempi eguali, e per conseguenza con velocità sempre maggiori.

65. Ciò mi sembra poter bastare a dare una idea degli aiuti che la geometria somministra alla meccanica col darle un mezzo facile, comodo, esatto di rappresentare in disegno, e per conseguenza in maniera ben sensibile e permanente, tutte le vicende di movimenti complicatissimi i quali sarebbero spesso assai difficili, e quasi impossibili a descrivere adeguatamente con parole. La geometria diviene così come la lingua della meccanica, e lingua, più che nissun'altra concisa, chiara, accurata, e di cui importa di acquistar per tempo, ed a costo di qualche fatica, la conoscenza e l'uso. Non conchiuderò tuttavia questo capitolo senza aver fatto osservare che noi possiamo ancora, mercè di opportune disposizioni, costringere un corpo che si muova in linea retta, e con una legge comunque complicata rispetto alle variazioni della velocità, che noi possiamo, dico, costringerlo a scrivere egli stesso, o più esattamente, a disegnare la storia particolarizzata e fedele del proprio movimento; del che io recherò per ora un esempio solo.

Tutti conoscono quelle *scale* o linee verticali divise in palmi, in decimetri, in once, od in altre parti eguali, e che sogliono segnarsi o scolpirsi sulle pile dei ponti o sui muri di sponda, per indicare l'altezza dell'acqua di un fiume sopra il suo livello medio, o sopra quello delle acque magre. Queste scale, a motivo dell'uso loro, si chiamano *fluviometri*, e somministrano indicazioni preziose, ma pur molto imperfette, sia perchè quelle scale sono per lo più così collocate che non si possono osservare se non da lontano e grossolanamente, sia perchè ad ogni modo non si potrebbero, senza grave incomodo, osservare continuatamente, ed è forza contentarsi di poche indicazioni raccolte ad intervalli più o men grandi di tempo. Al primo inconveniente si rimedia facendo scelta di un luogo facilmente accessibile, ove l'acqua del fiume abbia libera entrata, si mantenga sempre allo stesso livello con la corrente, e vada esente da agitazioni tumultuose. Quivi si colloca un grosso tubo verticale aperto di sotto e di sopra, in modo che la sua bocca inferiore stia in ogni tempo sommersa, e la sua bocca superiore sporga in ogni tempo al disopra della superficie dell'acqua; su questa superficie poi, e nell'interno del tubo si fa galleggiare una palla formata di sottil lastra d'ottone, la quale necessariamente si alzerà e si abbasserà insieme col livello della corrente, e per poterne più facilmente osservare le posizioni, si ferma sopra questa palla una sottilissima e leggerissima bacchettina o asticciuola, tanto lunga, che la sua estremità superiore sormonti sempre l'orlo del tubo, e possa così indicare accuratamente sopra una scala fissa, divisa in parti minute, per esempio, in centimetri o millimetri, l'altezza del livello dell'acqua. Per esimere poi l'osservatore dall'obbligo di rimanersi sempre accanto al suo strumento, ecco come si può operare. Dietro alla bacchettina del galleggiante, e nel luogo dove or ora supponevamo fermata una scala, si faccia disporre una tavoletta verticale la quale possa scorrere orizzontalmente fra due guide fisse. Un orologio, per via di un cordone, o meglio di una catenella, o di una dentiera, comunichi alla tavoletta un moto orizzontale lento e uniforme, in modo che essa si avanzi, per esempio, di quattro centimetri all'ora, e, per conseguenza, di novantasei centimetri in un giorno intiero. Finalmente alla cima dell'asticciuola del galleggiante si adatti un pennellino orizontale, intriso in un color conveniente, e così disposto, che la sua punta arrivi giusto giusto a sfiorare un foglio di carta teso sulla tavoletta, e sul quale si saranno anticipatamente segnate tante rette, parallele e verticali lontane tra loro di un centimetro, e ognuna delle quali verrà di quarto in quarto d'ora a passar dietro all'asticina del galleggiante. Se questo stesse fermo, cioè se il livello dell'acqua nel fiume non variasse, il pennello segnerebbe sulla carta una linea retta orizzontale; ma siccome il livello verrà ora alzandosi, ora abbassandosi, così la traccia del pennello non sarà orizzontale nè retta, ma curva e ondulata a mo' di quella della *fig.* 11, *tav.* 5, e le sinuosità di questa linea riveleranno a colpo d'occhio tutte le variazioni di livello avvenute in una giornata, e le ore precise in cui esse sono avvenute.

Non ci mancheranno in avvenire le occasioni di descrivere altri ingegnosissimi meccanismi, destinati ad usi analoghi e fondati sugli stessi principii.

66. Tornando ora per un istante ai cunei, dai quali ci siamo allontanati per parlare della rappresentazione grafica del movimento, diremo ancora, che nella pratica l'attrito assai notabile che incontrerebbe la punta della stanghetta nello scorrere lunghesso il filo del cuneo potrebbe nuocere alla regolarità del movimento, e talvolta arrestarlo del tutto. Si ovvia a questo inconveniente armando la punta della stanghetta con una rotella R mobilissima intorno ad un asse perpendicolare al piano del cuneo (*tav.* 5, *fig.* 11). Allora acciò il centro della rotella, e con esso tutta la stanghetta si muovano secondo la data curva ABC, il filo del cuneo non deesi tagliare seguendo il garbo di questa curva, ma sì bene della *abc* parallela alla prima, cioè equidistante da essa per un intervallo eguale al raggio della rotella. Questa curva è facilissima a descriversi; poichè facendo centro successivamente in molti punti B. D, E . . . . . della data curva, e descrivendo altrettanti circoli eguali con raggio pari a quello della rotella, la curva *abc* condotta al dissotto di ABC. . . . . tangenzialmente alle circonferenze di tutti quei circoli sarà la curva domandata. Ma se dopo tagliato il cuneo si venisse a cangiare la rotella R sostituendone un'altra di raggio maggiore o minore

della prima, il moto della stanghetta ne rimarrebbe alterato, e sarebbe anche arrestato del tutto, qualora il raggio della nuova rotella fosse maggiore del *raggio di curvatura* del filo del cuneo in alcuna delle parti in cui esso volge la sua concavità all'infuori.

L'aggiunta della rotella R rende più facile e più dolce il movimento della stanghetta, perchè in grazia di questa aggiunta il contatto della stanghetta e del cuneo che era un *contatto di scorrimento* si cangia in *contatto di sviluppo* (§ 49), che assai men del primo dà luogo ad attrito. Con pari artifizio può pure rimuoversi la resistenza che nasce dall'attrito della stanghetta entro ai piegatelli che ne dirigono il movimento, cioè sostituendo a questi due o più coppie di rotelle $rr$, $r'r'$ girevoli intorno ad assi fissi, (*fig.* 11), oppur anche tre o più rotelle $s$, $s'$, $s''$ acconciamente distribuite di qua e di là della stanghetta, e tra le quali questa debba scorrere nel suo movimento. Potrebbero ancora fermarsi gli assi delle rotelle sulla stanghetta medesima in guisa che si appoggiassero contro due guide rettilinee, disposte dalle due parti della stanghetta e parallelamente ad essa (1).

(1) NOTA *ai* §§ 61 *e seguenti.*

Coloro che hanno qualche domestichezza co' principii del calcolo differenziale scorgeranno di leggeri, che designando con le lettere $t$ ed $s$ le coordinate AQ e QM di un punto M del filo curvilineo di qualsivoglia cuneo (*tav.* 5, *fig.* 9) il quale si avanzi equabilmente, descrivendo nella unità di tempo lo spazio AQ eguale alla unità di lunghezza, l'intervallo $qt$ che abbiam dimostrato rappresentare la velocità della stanghetta all'istante in cui la sua punta tocca il filo del cuneo in M, sarà eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo $tMq$ che la tangente alla curva fa con l'asse delle ascisse, ed avrà per conseguenza per espressione il primo coefficiente differenziale $\frac{ds}{dt}$ dell'ordinata $s$. Ciò d'altronde risulta manifestamente dalla definizione stessa della velocità; poichè qualunque sia la legge con cui va muovendosi la stanghetta, cioè comunque cresca o scemi da un'istante all'altro la sua velocità, questa velocità dovendo pur variare per gradi insensibili potrà per un istante infinitesimo $dt$ riguardarsi come costante, cioè il movimento della stanghetta pel tempo $dt$ si potrà supporre equabile: onde, essendo $ds$ lo spazietto da esso descritto in questo tempo, sarà la sua velocità eguale allo spazio $ds$ diviso pel tempo $dt$, ossia al rapporto $\frac{ds}{dt}$.

Ciò che qui diciamo del movimento della stanghetta, dicasi pure di qual altro si voglia movimento progressivo rettilineo o curvilineo. Poichè supponendo che alla fine del tempo qualunque $t$ sia $s$ la lunghezza dell'arco di traiettoria compreso tra la posizione in cui sarà giunto il mobile, e la sua posizione *iniziale*, questa lunghezza $s$ variando continuamente da un istante all'altro dee considerarsi come una *funzione* del tempo: nell'istante $dt$ consecutivo al tempo $t$, la distanza $s$ prenderà l'incremento $ds$ positivo oppure negativo secondochè in quell'istante il movimento sarà *diretto* oppure *retrogrado:* epperò essendo $ds$ lo spazio descritto nel tempo infinitesimo $dt$, pel quale il moto può considerarsi come equabile, detta $u$ la velocità di questo moto, sarà

$$u = \frac{ds}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Così per esempio nel moto verticale dei corpi pesanti e liberi essendo, come abbiam veduto, gli spazii proporzionali ai quadrati de'tempi, sarà

$$s = \mathrm{K}t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Designando con K un coefficiente costante, il cui valore, eguale allo spazio descritto nel primo minuto secondo della caduta, varia pochissimo da un luogo all'altro della superficie terrestre ed è a Torino $\mathrm{K} = 4^m{,}9026$; differenziando adunque l'equazione (1) avremo per la espressione della velocità

$$u = 2\,\mathrm{K}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

onde la velocità del corpo cadente crescerà proporzionalmente ai tempi. Dalle equazioni (1) e (2) eliminando il tempo $t$, ci verrà

$$s = \frac{u^2}{4\mathrm{K}} = \frac{u^2}{19{,}61} \text{ oppure } u = \sqrt{19{,}61 \,.\, s} = 4{,}44\sqrt{s} \quad \ldots\ldots (3)$$

espressioni che ci fanno conoscere l'altezza $s$ dalla quale dee cadere un corpo pesante per acquistare qualsivoglia velocità $u$; e viceversa la velocità $u$ che esso acquista cadendo da qualsivoglia altezza $s$.

Moltiplicando i due membri della equazione (I), e poscia integrando, se ne trae

$$s = \int u dt + A \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

denotando A la costante arbitraria che riuscirà determinata qualora si conosca il valore dello spazio $s$ corrispondente a qualsivoglia dato istante, per esempio al principio del movimento; onde si vede, che se si costruisse una curva prendendo per ascissa il tempo $t$, e per ordinata la velocità variabile del movimento, lo spazio percorso in qualsivoglia tempo verrebbe rappresentato dall'area compresa tra l'asse delle ascisse, la curva e le due ordinate innalzate ne' due punti dell'asse corrispondenti al principio ed alla fine del tempo che si considera. Così per esempio, quando un corpo pesante viene lanciato verticalmente all'insù con qualsivoglia velocità $c$, questa velocità, mentre il corpo ascende, viene continuamente diminuendo, e diminuisce proporzionalmente ai tempi, onde il muovimento dicesi *equabilmente ritardato*. Alla fine del tempo $t$ l'espressione della velocità è dunque

$$u = c - 2Kt; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

epperò la linea che ha i tempi per ascisse, e le velocità per ordinate, sarebbe in questo caso una linea retta, che taglierebbe l'asse delle ordinate alla distanza $c$ dall'origine, e farebbe con quello delle ascisse l'angolo di cui la tangente trigonometrica è $2K$. Moltiplicando per $dt$ l'espressione delle velocità, ed integrando col supporre che al principio del movimento, cioè quando $t = o$, sia pure $s = o$, si trova

$$s = ct - Kt^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4).$$

Queste equazioni (3), (4) ci mostrano che, scemando continuamente la velocità del grave ascendente, essa diverrà nulla, e il grave cesserà di salire alla fine del tempo $t = \frac{c}{2K} = \frac{c}{9^m,805}$; poichè sostituendo questo valore di $t$ nella equazione (3) si trova $U = o$: sostituendolo parimenti nella (4) viene $s = \frac{c^2}{4K}$, espressione della altezza totale alla quale esso sarà salito.

Dalle cose fin qui dette si vede, che le vicende del movimento progressivo si possono graficamente rappresentare per mezzo di curve, prendendo per ascisse i tempi, e per ordinate gli spazii oppure le velocità. Delle curve che si ottengono prendendo per ordinate gli spazii, già abbiamo diffusamente trattato nel testo: arrestiamoci qui alcuni istanti a considerare quale sarà l'andamento di quelle in cui prendansi per ordinate le velocità.

Potendo il moto essere *diretto* ovvero *retrogrado*, la velocità nel primo caso si considera come *positiva* e si rappresenta con una ordinata diretta al dissopra dell'asse delle ascisse: nel secondo caso si considera come *negativa*, e l'ordinata che la rappresenta si porta al dissotto dell'asse. Quindi

1° La curva sarà tutta dalla stessa parte dell'asse delle ascisse se il moto è progressivo, e si allontanerà dall'asse quando il moto è *accelerato*, si avvicinerà all'asse quando è ritardato. I valori *massimi* e *minimi* dell'ordinata corrisponderanno agli istanti ne' quali il mobile è animato da velocità *massima* o *minima*: questi istanti sono sempre preceduti da un'accelerazione e seguiti da un rallentamento nel caso del *massimo*: e sono preceduti da rallentamento e seguiti da accelerazione nel caso del *minimo*.

2° La curva passa da una parte all'altra dell'asse intersecandolo, tutte le volte che il moto si fa da diretto retrogrado, o da retrogrado diretto: cioè tutte le volte che il mobile dopo di essersi allontanato fino ad una certa distanza dal suo punto di partenza, cangiando direzione torna ad accostarvisi; o viceversa dopo di essersi avvicinato a questo punto fino ad una certa distanza, mutando verso comincia ad allontanarsene. La curva passa e ripassa dunque continuamente da una parte all'altra dell'asse, quando il movimento è alternativo.

3° La curva è formata di una infinità di porzioni eguali e similmente poste rispetto all'asse, quando il movimento è *periodico*, cioè quando ad eguali intervalli di tempo la velocità riprende sempre i medesimi valori: la durata di questi intervalli di tempo, cioè il *periodo* del moto sarà dato dalla lunghezza compresa sull'asse delle ascisse, tra i piedi delle ordinate di due punti *omologhi* e *consecutivi* della curva.

4° L'area compresa fra la curva, l'asse delle ascisse e due ordinate qualunque rappresenterà, come abbiamo dimostrato, lo spazio descritto dal mobile nel tempo trascorso tra i due istanti corrispondenti ai punti dell'asse, ne' quali sonosi innalzate quelle due ordinate. Le aree dovranno ritenersi come positive o come negative secondochè la curva sarà al dissopra o al dissotto dell'asse, e rappresenteranno spazii descritti dal mobile con moto *diretto*, ovvero con moto *retrogrado*. Se la curva presenta una infinità di aree eguali e successive, poste alternativamente al dissopra e al dissotto dell'asse, il mobile fa una infinità di *digressioni* eguali e volte in parti contrarie.

5° Se sopra una parte qualunque dell'asse delle ascisse come base si costruisce un rettangolo di area equivalente a quella della corrispondente porzione di curva, l'altezza di questo rettangolo rappresenterà la *velocità media* del movimento per l'intervallo di tempo corrispondente a quella parte dell'asse delle ascisse che si è presa per base: sarà questa la velocità con cui camminando il mobile *equabilmente*, esso descriverebbe uno spazio eguale a quello che effettivamente descrive nello stesso tempo in virtù della sua velocità variabile.

Se per qualunque movimento dato si costruiranno sul medesimo asse delle ascisse, entrambe le curve di cui siam venuti parlando, cioè quella che ha per ordinata gli spazii e che per brevità chiameremo la curva (S); e quella che ha per ordinata la velocità, e che chiameremo la curva (U), facilmente si comprende dalle spiegazioni in cui siamo entrati; che

1° Pei tratti in cui la curva (U) sarà al dissopra dell'asse la curva (S) sarà *acclive:* essa al contrario sarà *declive* ne' tratti in cui l'altra curva starà al dissotto dell'asse.

2° Pei tratti in cui la curva (U) sarà *acclive* la (S) sarà *convessa* verso l'asse: e sarà *concava* ne' tratti ne' quali la prima è *declive.*

3° Ai *massimi* ed ai *minimi* della curva (U) corrisponderanno *punti di flesso* della curva (S); e la tangente in questi *punti di flesso* sarà parallela all'asse, quando ne' punti corrispondenti la curva (U) è tangente all'asse.

4° Ai punti ne' quali la curva (U) taglia l'asse delle ascisse corrispondono *massimi* o *minimi* nella curva (S); *massimi* se la curva (U) è *declive; minimi* se è *acclive.*

## CAPITOLO UNDICESIMO

### DEGLI ECCENTRICI E DELLE MANOVELLE CONDUTTRICI.

67. Se una piastra piana terminata da un contorno curvilineo qualunque ACEG (*tav.* 6, *fig.* 1) girerà nel proprio piano e pel verso DCBA intorno ad un asse O perpendicolare al piano della piastra, l'andivieni o stanghetta AI, costretto dalle guide o piegatelli PP a camminar sempre secondo una linea retta che prolungata vada a passare pel centro O del movimento, e spinta dalla molla RI o dal proprio peso, ad appoggiarsi sempre con la sua punta A contro il perimetro della lastra girante, prenderà un moto rettilineo alternativo, ora scostandosi dal centro del moto O, ora accostandosi ad esso, secondo che i raggi OA, OB, OC, ...... che passeranno successivamente sotto la punta della stanghetta, andranno crescendo o decrescendo. Una tal piastra si chiama un *eccentrico*, e può in certo qual modo riguardarsi come un cuneo che gira; entrambi i meccanismi sono destinati a produrre moto rettilineo; entrambi operano per immediato contatto; entrambi possono servire a trasformare un movimento equabile in un altro moto equabile, oppure in un moto vario secondo qualsivoglia legge; ma ne' cunei il movente cammina in linea retta, negli eccentrici ha moto circolare, epperò l'azione dei primi è necessariamente limitata ad un tempo molto breve (salvocchè il cuneo non avesse un moto alternativo), quella dei secondi può continuarsi indefinitamente per lo stesso verso. Gli eccentrici finalmente, come i cunei, conducono ad una maniera di rappresentare in disegno le vicende di un moto rettilineo qualunque, od anche di far sì ch'esso lasci impressa di sè una traccia permanente, la quale ne riveli poi all'occhio la natura e tutti gli accidenti.

Gli eccentrici, come ogni altro meccanismo, danno luogo a due quistioni distinte; poichè, o è dato l'eccentrico e si domanda qual movimento esso sia capace di comunicare alla stanghetta col rivolgersi sul suo asse; oppure è dato il movimento ch'esso dee trasmettere alla stanghetta nel suo giro equabile, e si domanda quale esser debba perciò la figura del suo contorno.

68. Fingiamo in primo luogo che, mentre l'eccentrico descrive equabilmente un giro intiero intorno al punto O (*tav.* 6, *fig.* 3), l'estremità A della stanghetta debba sollevarsi da A fino in H con moto equabile, e poi ricadere ad un tratto nella sua prima posizione A. Se noi divideremo l'altezza AH in un numero qualunque di parti eguali, per esempio in sei parti, nei punti 1, 2, 3, 4, 5, e la circonferenza di circolo descritto col raggio OA in un egual numero di parti eguali ne' punti 1', 2', 3', 4', 5', il contorno curvilineo dell'eccentrico dovrà esser tale, che quando avrà fatto un sesto di giro esso venga incontrare la verticale AH nel punto 1, quando avrà fatto due sesti di giro venga incontrarla nel punto 2, e così di seguito. Quindi, se si condurranno i raggi O1', O2', O3', O4', O5', OA indefinitamente prolungati, e si porteranno sopra questi raggi le lunghezze OB eguale ad O1, OC eguale ad O2, OD eguale ad O3 ecc., i punti B, C, D ecc. saranno sul cercato perimetro, ed unendoli con una curva continua ABCDEF, si sarà costruito l'eccentrico domandato. Si vede da questa costruzione medesima che il perimetro dell'eccentrico sarà formato da una spira intiera della curva, detta dai geometri *spirale d'Archimede*, di cui sarà il *passo* eguale alla *corsa*, *cacciata* o *mandata* AH della stanghetta.

Che se si volesse che, durante una rivoluzione dell'eccentrico, la stanghetta si sollevasse due volte equabilmente fino in H (*fig.* 4), e due volte ricadesse in A, il perimetro curvo andrebbe formato di due mezze spire ABC*h*, *abc*H, volte dalla stessa parte, e con le loro origini, l'una in A, l'altra in *a*. Facendo le due mezze spire di *passo* disuguale, come si vede nella *fig.* 5, la stanghetta sarà sollevata due volte per ogni giro ad altezze disuguali e ad uguali intervalli di tempo; e variando col passo anche l'ampiezza delle due porzioni di spirale, come nella *fig.* 6, la stanghetta sarà sollevata ad altezze disuguali in tempi disuguali. È facile il comprendere ciò che avverrà impiegando gli eccentrici delle *figg.* 7 e 8, ne' quali il contorno è sempre formato di archi di spirale d'Archimede, tutti di eguale ampiezza, ma di passo ora eguale, ora disuguale.

69. In tutti questi esempli noi abbiamo supposto che alla fine di ogni salita la stanghetta dovesse ricadere liberamente nella sua posizione primitiva; ma per lo più si vuole ch'essa vi ritorni con moto equabile, come se n'era prima allontanata. Allora, se essa dee fare una sola andata e una sola venuta ad ogni giro dell'eccentrico, il contorno di questo sarà formato di due mezze spire con l'origine comune, ma voltate in parti contrarie, come si vede nella *fig.* 9, e prenderà il nome di *cuore*. Se invece di due mezze spire si impiegheranno quattro quarti di spira, come nella *fig.* 10, la stanghetta farà due andate e due venute equabilmente ad ogni giro dell'eccentrico; essa ne farebbe tre se s'impiegassero sei sesti di spira, disposti come nella *fig.* 11, che rappresenta una rosetta a tre *lobi* o *foglie*. In quest'ultimo eccentrico, come in quello della *fig.* 9, è facile lo scorgere che tutti i diametri sono eguali fra loro, e che si può impiegare un andivieni a due caviglie B, E, in modo che la curva ED cominci a spingere all'ingiù la caviglia E, tosto che la curva CB ha cessato di spingere all'insù la caviglia B; per produrre il moto retrogrado dell' andivieni non è allora necessaria l'azione di un peso o di una molla, ed esso può, senz'altro artifizio, collocarsi in positura orizzontale. Si potranno nello stesso modo formare altre rosette a quattro, a cinque o a più lobi.

Così dunque, combinando più archi di spirale d'Archimede si faranno infiniti eccentrici, mercè dei quali, nel tempo di una rivoluzione, la stanghetta potrà fare qualsivoglia numero di corse eguali o disuguali per ampiezza e per durata, e quindi con velocità tra loro eguali o disuguali, ma in modo però che ciascuna corsa si farà tutta con la medesima velocità, cioè con moto equabile.

70. Nè punto più difficile sarebbe la costruzione di un eccentrico atto a comunicare alla stanghetta un movimento accelerato o ritardato, purchè fosse data la legge con cui dovrebbero andar crescendo o diminuendo gli spazii ch'essa avrebbe da percorrere in eguali e successivi intervalli di tempo; un esempio o due basteranno a dar norma per tutti i casi. Supponiamo (*fig.* 14), che si voglia un eccentrico, il quale ad ogni giro che farà con moto equabile intorno al punto O, sollevi prima l'andivieni da A in H con moto equabilmente accelerato, e lo lasci poi ridiscendere da H in A con moto equabilmente ritardato, impiegando tempi eguali nella salita e nella discesa. Se il moto dell'andivieni dovess'essere equabile, mentre l'eccentrico fa, per cagion d'esempio, la dodicesima parte di un giro, esso salirebbe o scenderebbe sempre dalla sesta parte di AH; ora invece si vuole che la legge del movimento sia tale, che dividendo in sei parti uguali la durata della salita, gli spazii descritti in questi sei intervalli di tempo stiano tra di loro come i numeri 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11; e similmente che, dividendo in sei eguali tempi la durata della discesa, gli spazii descritti in questi sei tempi formino la serie decrescente 11 : 9 : 7 : 5 : 3 : 1 (§ 63).

Per ottenere un tal movimento, dividasi la circonferenza descritta con raggio OA in dodici parti eguali, e conducansi i raggi indefinitamente prolungati O1, O2, O3 ...... O11. Dividasi la lunghezza AH della corsa in 36 parti eguali, e siano *b*, *c*, *d*, *e*, *f* il primo, il quarto, il nono, il sedicesimo, il venticinquesimo punto di divisione. Poi fatto centro in O con raggio O*b* si tagli la linea O1 in B; con raggio O*c* si tagli la linea O2 in C, e così discorrendo, finchè con raggio O*h* si venga a tagliare la linea di mezzo O6 in H. La curva ACEH sarà la semicirconferenza dell' eccentrico domandato, e ripetendola simmetricamente dall'altra parte del diametro AH se ne avrà il perimetro intero.

Se poi si volesse (come il più delle volte sarà conveniente) che la salita non si acceleri fino in *h* (*fig.* 15); ma sia per la prima metà *accelerata equabilmente*, e per la seconda metà *equabilmente ritardata*, allora gli spazii descritti ne'sei eguali intervalli di tempi in cui tanto la salita, quanto la discesa si suppongono divise, dovranno formare la progressione 1 : 3 : 5 : : 5 : 3 : 1; epperò l'altezza A*h* della mandata, eguale alla somma di tutti questi spazii successivamente descritti, si dividerà in diciotto parti eguali; e supponendo che siano *b*, *c*, *d*, *e*, *f* il primo, il quarto, il nono, il quattordicesimo ed il diciasettesimo punto di divisione, si terminerà la costruzione come nell'esempio precedente.

71. Egli è quasi inutile di osservare che quando una parte del contorno dell'eccentrico sia formata di archi di circolo che abbiano il loro centro nel centro del movimento, la stanghetta non sarà sospinta nè innanzi, nè indietro, mentre la sua punta si appoggerà sopra uno di questi archi, onde essa si rimarrà in riposo: le *figg.* 12, 13 e 16 rappresentano tre eccentrici con uno o con due *riposi:* nella *fig.* 12 vi ha un riposo solo RR′ nel punto più basso della corsa: nella *fig.* 13 esso si fa nel punto più alto: nella *fig.* 16 finalmente vi ha due riposi, l'uno RR′ durante la salita, l'altro *rr′* durante la discesa: in tutti e tre gli esempli la durata di ciascun riposo è di una sesta parte della rivoluzione dell'eccentrico.

Il movimento della stanghetta sarà in generale tanto più dolce, quanto meno il contorno dell'eccentrico si scosterà da una circonferenza di circolo, che abbia il suo centro nel centro del movimento, ossia quanto meno l'angolo compreso tra la tangente a qualunque punto dell'eccentrico, ed il raggio condotto a quel punto, si discosterà da un angolo retto; ond'è che, per questo rispetto, converrà sempre di fare quanto più grande si possa il raggio minimo OA dell'eccentrico, a fronte della mandata della stanghetta.

Qui pure, come pei cunei, il moto grandemente si agevola e si addolcisce coll'armare di una rotella la punta della stanghetta, e qui pure, dopo di avere disegnato la curva secondo la quale dovrebbe tagliarsi l'eccentrico per condurre direttamente con la legge voluta il centro della rotella, si sostituirà a questa un'altra curva tangente a tutti i circoli descritti con raggio eguale a quello della rotella, facendo centro successivamente in un numero grande di punti della prima curva (*fig.* 23).

72. Qualunque sia il movimento che un eccentrico dato è capace di comunicare alla stanghetta, lo stesso movimento potrebbe egualmente esserle comunicato da un cuneo di figura conveniente, e non sarà difficile a comprendere che all'eccentrico della *tav.* 6, *fig.* 3 si potrebbe sostituire un cuneo di filo retto come quello della *tav.* 4, *fig.* 11; che all'eccentrico della *tav.* 6, *fig.* 9 si potrebbe sostituire un cuneo col filo formato di due linee rette di egual lunghezza, ed egualmente inclinate, ma l'una acclive o ascendente, l'altra declive o discendente. Si comprenderà pur facilmente l'analogia che passa fra l'eccentrico della *tav.* 6, *fig.* 12 e il cuneo della *tav.* 5, *fig.* 2, fra l'eccentrico della *tav.* 6, *fig.* 13 e il cuneo della *tav.* 5, *fig.* 1. Ancora, un po' d'attenzione farà scorgere che se si volesse sostituire un cuneo all'eccentrico della *tav.* 6, *fig.* 14, il suo filo dovrebb'essere formato di due curve paraboliche eguali a quella della *tav.* 5, *fig.* 3, e collocate simmetricamente l'una a sinistra, l'altra a destra della verticale BC. Finalmente se si volesse tradurre in cuneo l'eccentrico, di cui abbiamo insegnata la costruzione nell'ultimo alinea del § 70, questo cuneo verrebbe composto di due curve eguali

a quella della *tav.* 5, *fig.* 8, e collocate simmetricamente dalle due parti della verticale BC.

Generalmente se vogliasi descrivere la figura del filo di un cuneo atto a produrre il medesimo movimento che un eccentrico qualunque dato (*tav.* 6, *fig.* 1), descrivasi intorno al centro O del movimento un circolo di qualsivoglia raggio; se ne divida la circonferenza in un gran numero di parti eguali, per esempio in otto parti, ne' punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e si conducano i raggi O1, O2, O3. . . . . O7, O8, prolungandoli fino all'incontro del contorno dell'eccentrico in A, B, C. . . . . GH. Prendasi poi la retta indefinita AB (*fig.* 2) per base del cuneo che si vuol costruire, e segnate sopra di questa altrettante parti eguali di grandezza arbitraria, quante sono quelle in cui è stata divisa la circonferenza, ergansi ne' punti di divisione 1, 2, 3. . . . . 7, 8, 1 le perpendicolari 1*a*, 2*b*, 3*c*. . . . . 7*g*, 8*h*, 1*a'*, rispettivamente eguali ai raggi OA, OB, OC. . . . . OG, OH, OA; segnando pei punti *a*, *b*, *c*, *d*. . . . . *g*, *h*, *a'* una curva continua, sarà questo il garbo del filo del cuneo domandato, cioè equivalente all'eccentrico proposto.

73. Già abbiamo avvertito (§ 43), che un eccentrico si può far di figura circolare, purchè il centro del moto non coincida col centro di figura. Sia dunque AFGE (*fig.* 17) un tale eccentrico, O il centro del moto, C il centro di figura: pei punti O, C, la cui distanza OC si dirà l'*eccentricità*, si conduca il diametro AG; sia finalmente E*g* la verticale secondo cui si muove la stanghetta, e che prolungata viene a passare pel centro del moto O. Supponiamo che, quando l'eccentrico comincia a girare, il punto A del suo perimetro si trovi in *a* sulla verticale O*g*. La punta della stanghetta si troverà alla distanza *oa* (eguale ad OA) dal punto O, e questa sarà la posizione più bassa cui essa possa discendere. Dopo un quarto di giro dell'eccentrico il punto D verrà in *d* sulla verticale O*g*, e l'altezza O*d* della stanghetta sopra il punto O sarà per conseguenza eguale ad OD; seguitando

la rivoluzione dell'eccentrico, la stanghetta seguiterà pure a salire, fintantochè, tornando verticale il diametro AG, essa siasi sollevata fino in *g* ad un'altezza eguale ad OG; poi essa comincierà a discendere, e discenderà di nuovo fino in *a*, durante una mezza rivoluzione dell'eccentrico, passando per gli stessi punti, e riprendendo le stesse velocità con cui nella mezza rivoluzione precedente essa si era sollevata da *a* in *g*, percorrendo uno spazio *ag* eguale al doppio della eccentricità OC.

Ciò posto, applicando qui il metodo testè insegnato (§ 72) per costruire la figura del cuneo equivalente ad un eccentrico dato, facilmente si otterrà la curva della *fig.* 18, nella quale la base AA′ arbitrariamente assunta rappresenta la durata di una intera rivoluzione, e le ordinate A*a*, B*b*, D*d*, E*f*, G*g*, F′*f*′, D′*d*′, B′*b*′, A′*a*′ le altezze della stanghetta sopra il centro O del movimento, ad ogni ottava parte di giro dell'eccentrico.

Alla sola vista di questa curva si comprende che la velocità della stanghetta sarà nulla, nell'istante in cui passeranno sotto di essa i punti A, G (*fig.* 17), ossiano le due estremità del diametro che passa pel centro del movimento O; poichè nei punti corrispondenti *a*, *g* della curva *aga*′ (*fig.* 18), la tangente è orizzontale. In queste due posizioni la stanghetta avrà dunque un istante di riposo, essendo pervenuta al punto più basso od al punto più alto della sua corsa. Si vede parimente che nel passare da quello a questo, o da questo a quello, il suo moto sarà accelerato da principio, poi ritardato, stantecchè la curva ascendente è concava da *a* fin verso *d*, e convessa da questo punto fino in *g*, e la curva discendente è convessa da *g* fin verso *d*′, poi concava fino in *a*′.

74. Ma per determinare accuratamente le vicende della velocità della stanghetta nelle diverse posizioni dell'eccentrico, sarà meglio applicar qui le considerazioni e le regole del capitolo nono. Infatti il raggio CE dell'eccentrico essendo invariabile, la stanghetta dovrà muoversi nello stesso modo

come se la sua punta fosse unita a snodo con un tirante EC, unito esso pure a snodo in C con una manovella mobile intorno al centro O, e di lunghezza eguale alla eccentricità OC; in altre parole l'eccentrico circolare produce assolutamente lo stesso effetto che produrrebbe una manovella di gomito o braccio eguale alla eccentricità, ed unita all'andivieni per via di un tirante di lunghezza eguale al raggio dell'eccentrico.

Il moto della stanghetta essendo rettilineo, esso dee considerarsi come un moto circolare fatto intorno a un centro infinitamente lontano e collocato sopra la retta ER perpendicolare alla direzione del movimento della stanghetta; ende in somma, in luogo dell'eccentrico e della stanghetta avremo a considerare i movimenti di due bracci, l'uno OC, l'altro infinitamente lungo ER, uniti tra loro ne' punti E, C per via del tirante EC. Prolungando adunque il braccio OC fin che incontri in R la direzione dell'altro braccio ER, le velocità assolute dei punti C, E staranno tra loro direttamente come le distanze RC, RE.

75. La *fig.* 2 della *tav.* 7 mostra un'altra disposizione di manovella motrice, equivalente ne' suoi effetti alla manovella ordinaria, ed all'eccentrico circolare. Il centro del moto è in O, il gomito della manovella è OC, e la sua estremità C porta una asticciuola impegnata in una feritoia in forma di arco circolare di raggio qualunque CI, e di corda AB eguale al doppio del gomito OC della manovella; questa feritoia è intagliata nella gruccia AB in cui termina inferiormente la stanghetta EI. Girando la manovella, l'asticciuola C preme ora il margine convesso, ora il margine concavo della feritoia, spinge così la stanghetta ora all'insù, ora all'ingiù per una corsa eguale al doppio del gomito OC, ed intanto essa scorre alternativamente dall'estremità B dell'arco all'estremità A, e da questa a quella. Essa trovasi così costretta a star sempre alla medesima distanza CI dal centro I, ed è per conseguenza nello stesso caso come se fosse connessa col punto I mercè

di un tirante CI. Questo meccanismo equivale dunque, come dicevamo, ad un eccentrico di raggio CI e di eccentricità OC, epperò tirando la orizzontale IK fino ad incontrare in K la direzione CK del braccio OC prolungato, la velocità assoluta della stanghetta starà in ciascun istante a quella dell'asticciuola C, come la distanza KI alla distanza KC.

Se la feritoia AB fosse rettilinea (*tav.* 7, *fig.* 1), essa dovrebbe considerarsi come un arco di circolo di raggio infinito, e la manovella opererebbe allora come se fosse unita alla stanghetta per via di un tirante infinitamente lungo, onde non è difficile lo scorgere che in ciascuna posizione del meccanismo la velocità della stanghetta starebbe a quella dell'asticciuola C, come la distanza CE di questa dal mezzo della feritoia sta alla lunghezza CO del gomito della manovella.

In molte macchine, e nelle macchine a vapore particolarmente, si suol dare all'eccentrico una disposizione differente da quelle finora descritte, e che merita d'essere conosciuta. Essa vedesi rappresentata nella *tav.* 6, *fig.* 19; l'asse di rotazione O porta una piastra circolare eccentrica AB, di qualunque raggio, e di eccentricità OC eguale al gomito della manovella di cui dee tener luogo. Questa piastra è circondata da un anello DLD'M in cui può liberamente girare, ma da cui non può uscire; un gambo rigido LE fa corpo con questo anello, e va articolarsi in E con la stanghetta o andivieni EF, costretto dai piegatelli P, P' a camminare in linea retta. Egli è evidente che, le lunghezze delle rette OC e CE essendo invariabili, l'effetto è il medesimo, come se OC fosse una manovella articolata con un tirante CE, oppure come se si facesse uso di un eccentrico circolare di raggio CE e di eccentricità OC. Le due descritte disposizioni essendo tali che la distanza CE (*tav.* 6, *fig.* 19), CI (*tav.* 7, *fig.* 2) può farsi quanto grande si voglia, ed anche infinita (come nella *tav.* 7, *fig.* 1), senza che il meccanismo risulti nè troppo voluminoso, nè troppo pesante, faranno sì che il movimento della stanghetta si renda quanto dolce si vorrà, senza incorrere nelle difficoltà che si incontrerebbero nel fare un eccentrico di raggio grandissimo (1).

(1) Assai facile è il ridurre a formule analitiche la teorica dell'eccentrico. Infatti prendendo per polo il centro del movimento, contando gli angoli $\varphi$ pel verso contrario a quello della rotazione dell'eccentrico, e partendo da un determinato raggio $z_0$, che potrà essere il minimo di tutti, l'equazione polare del contorno dell'eccentrico sarà della forma

$$z = z_0 f(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

e supponendo che nella prima posizione del meccanismo la punta della stanghetta tocchi il contorno dell'eccentrico all'estremità di questo raggio $z_0$, mentre l'eccentrico descriverà intorno al suo asse l'angolo $\varphi$, la stanghetta si solleverà per lo spazio

$$s = z - z_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

epperò la sua velocità $u$ sarà espressa per

$$u = \frac{dz}{dt}.$$

Ora supponendosi equabile la rotazione dell'eccentrico, se chiamiamo T la durata di una intera rivoluzione di essa, avremo

$$t = \mathrm{T}\,\frac{\varphi}{2\pi}\,, \qquad dt = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\,d\varphi$$

e per conseguenza

$$u = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \frac{dz}{d\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Per mezzo di questa ultima espressione, data l'equazione della curva, avrem tosto il valore della velocità $u$ per ogni posizione del meccanismo. Così per esempio nell'eccentrico circolare della *tav.* 6, *fig.* 17 detto $r$ il raggio del circolo, $a$ la eccentricità, sarà $z_0 = r - a$, e le equazioni (1), (2), (3) diverranno

$$z = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi} - a\cos\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

$$s = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi} + a(1 - \cos\varphi) - r \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

$$u = \frac{2\pi a}{\mathrm{T}} \sin\varphi \left(1 - \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\varphi}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3').$$

76. Le applicazioni dell'eccentrico nelle operazioni delle arti sono così numerose e così varie, che la loro descrizione occuperebbe più spazio che non possiamo qui consacrare a

Quando l'eccentricità $a$ sarà molto piccola rispetto al raggio $r$, come ordinariamente avviene ne' meccanismi delle *figg.* 19, *tav.* 6 e 2, *tav.* 7, potrannosi negligere le potenze superiori al quadrato della frazione $\frac{a}{r}$, ed allora le equazioni diverranno

$$z = r - \frac{a^2}{2r}\sin^2\varphi - a\cos\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (1'')$$

$$s = a\,(1-\cos\varphi) - \frac{a^2}{2r}\sin^2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (2'')$$

$$u = \frac{2\pi a}{\mathrm{T}}\sin\varphi\left(1 - \frac{a}{r}\cos\varphi\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3'')$$

e nel meccanismo della *fig.* 1, *tav.* 7, essendo $r = \infty$

$$s = a\,(1-\cos\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (2''')$$

$$u = \frac{2\pi a}{\mathrm{T}}\sin\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (3''')$$

Se fosse data la legge, con cui si vuole che vada muovendosi la stanghetta, le medesime equazioni farebbero conoscere le forme da darsi al contorno dell'eccentrico. Vogliasi per esempio come nel § 70 del testo che, mentre l'eccentrico dà un mezzo giro, la stanghetta faccia la corsa $h$ con moto equabilmente accelerato; dovrà lo spazio $s$ descritto nel tempo $t$ essere proporzionale al quadrato di questo tempo, e divenire $= h$ quando $t = \frac{1}{2}\mathrm{T}$: onde segue che sarà

$$s = \frac{4ht^2}{\mathrm{T}^2};$$

ma a motivo della equabilità del moto dell'eccentrico si ha pure

$$\frac{t}{\mathrm{T}} = \frac{\varphi}{2\pi};$$

dunque $s = \frac{h\varphi^2}{\pi^2}$; e l'equazion polare della curva domandata sarà

$$z = z_0 + \frac{h\varphi^2}{\pi^2};$$

rimanendo lo $z_0$ interamente arbitrario.

Per amor di semplicità ho supposto così nel testo, come nelle formule quest'uso; limitiamoci ad osservare che la regolare distribuzione dei fili sugli aspi e sui rocchetti delle filature da seta, da lino, da cotone e da lana si opera per lo più per mezzo di eccentrici, in un modo che avremo altra migliore occasione di dimostrare; che il movimento dei licci nel telaio meccanico da tessere è regolato da eccentrici; che l'eccentrico equabile ossia spirale della *fig.* 3 serve in molti orologi ad innalzare e ad abbassare il pendolo per diminuirne od accrescerne la lunghezza, affine di accelerare o di ritardare la marcia dello strumento; che finalmente lo stesso eccentrico serve pure a costruire uno strettoio molto semplice, sostituendo alla stanghetta un tavolone di legno o di metallo, che viene sospinto contro la sostanza che debb'essere spremuta.

che precedono, che la direzione della stanghetta passi pel centro O del movimento dell'eccentrico. Che se questa condizione non fosse adempiuta, detta $e$ la distanza della direzione della stanghetta dal punto O, quando la punta di essa si appoggia all'estremità del raggio $z_0$, questo raggio fa manifestamente con la stanghetta un angolo $\alpha$ tale che

$$\sin\alpha = \frac{e}{z_0} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Quando poi l'eccentrico ha descritto, partendo da questa posizione, un angolo $\xi$, la stanghetta viene a toccarne il contorno all'estremità di un altro raggio $z$, facendo con questo raggio un angolo $\psi$, tale che

$$\sin\psi = \frac{e}{z}, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

onde l'angolo compreso tra i due raggi $z_0$ e $z$ è $= \alpha + \xi - \psi$, ed intanto la stanghetta si è sollevata della quantità

$$s = e\,(\operatorname{cotang}\psi - \operatorname{cotang}\alpha) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Nella equazione della curva $z = z_0 f(\varphi)$ mettendo ora $\alpha + \xi - \psi$ in luogo di $\varphi$, e sostituendo per $\psi$ ed $\alpha$ i valori desunti dalle equazioni (I), (II), si avrà una equazione tra $z$ e $\xi$ per mezzo della quale si determinerà lo $z$; e quindi la (III) darà il valore di $s$, il quale differenziato farà conoscere la velocità in tutte le posizioni del meccanismo.

In uno dei capitoli passati (§ 65) abbiamo descritta una disposizione, mercè della quale un corpo che si muova in linea retta, per esempio il galleggiante di un fluviometro, lascierà segnata una traccia permanente che darà a conoscere la natura e le vicende del suo movimento. In quello stesso esempio l'orologio invece di dare un moto rettilineo al piano rettangolare sul quale la curva è distesa, potrà portare sull'albero della lancetta delle ore un disco, cioè un piano circolare di legno o di metallo, il quale farà un giro intero in dodici ore, e sul quale si potrà distendere la carta; allora se l'asticciuola del galleggiante si muove su e giù secondo il diametro del disco, è chiaro che il pennello fermato in cima a quest'asticciuola, a motivo della combinazione del suo moto rettilineo col moto circolare del disco, segnerà sulla carta una curva, la quale rivelerà la natura del movimento del galleggiante, e quindi la legge con cui le acque del fiume sono venute alzandosi od abbassandosi. Così per esempio, se si trovasse, dopo un giro del disco, segnata sopra di esso una spirale d'Archimede come quella della *fig.* 3, si conchiuderebbe che l'acqua si è alzata equabilmente, cioè con moto uniforme; se all'incontro la curva descritta dal pennello fosse un circolo concentrico all'asse del disco, converrebbe dire che nell'intervallo di dodici ore impiegato da questo a fare la sua rivoluzione, il livello del fiume non ha variato nè punto nè poco. Noi vedremo a suo tempo altre applicazioni del medesimo principio.

77. Questa osservazione ci conduce a notare, che cogli eccentrici fin qui descritti, il *periodo* del movimento della stanghetta non può mai avere una durata che ecceda quella di una rivoluzione dell'eccentrico stesso; poichè ad ogni giro la stanghetta riprende necessariamente le medesime posizioni e le medesime velocità. Ma se invece di fare che la punta di essa si appoggi sul contorno del disco girante, noi faremo che questa punta ripiegandosi ad angolo retto, cioè prendendo

una direzione perpendicolare al piano del disco, entri in una scanalatura curvilinea scolpita sulla faccia di questo, una tale scanalatura potrà dare intorno al centro del movimento un numero qualunque di giri, ora avvicinandosi al centro, ora discostandosene, e la punta della stanghetta impegnata nella scanalatura ne seguirà ne' suoi movimenti la traccia. Così nella *fig.* 22 della *tav.* 6 vedesi sulla faccia del disco FGI, segnata una scanalatura ABCDHD'CB'A, formata di due spirali eguali ed opposte ABCDH, AB'CD'H, le quali si imboccano in A ed in H, e formano un circuito chiuso: con un tal disco la stanghetta, il cui dente fosse impegnato nella scanalatura, si allontanerebbe dal centro O della quantità AH durante un giro del disco, e tornerebbe ad accostarvisi di egual quantità durante il giro seguente, onde la durata del suo periodo sarebbe doppia della durata di una rivoluzione del disco.

Se ciascuna delle due spirali contenesse due, tre, o più spire, il periodo della stanghetta comprenderebbe quattro, sei, o più giri del disco. Qualora si temesse che i troppi rigiri della scanalatura indebolissero soverchiamente il disco, o potessero essere difficilmente seguiti dal moto della stanghetta, sarebbe pur facile lo scolpire su ciascuna faccia del disco una metà soltanto della scanalatura; la stanghetta dovrebbe allora aver la forma di una forca, i cui due rebbi, paralleli tra di loro, passassero l'uno di qua, l'altro di là del disco, e fossero armati ciascuno di un dente, sicchè or l'uno or l'altro venendo ad impegnarsi a vicenda nella scanalatura corrispondente, la stanghetta or dall'uno or dall'altro ricevesse il movimento.

78. Gli eccentrici si sono da noi fin qui considerati come atti a trasformare il moto circolare continuo in rettilineo alternativo; essi impiegansi pure frequentemente alla trasformazione del moto circolare continuo in circolare alternativo, come appare dalla *fig.* 20, *tav.* 6. Girando infatti l'eccentrico HIL intorno al centro O, il dente P del saliscendolo QP

verrà successivamente ad appoggiarsi in diversi punti del perimetro HIL, ora avvicinandosi al centro O, ora scostandosene, e descriverà per conseguenza una porzione dell'arco circolare OPS, che ha il suo centro in Q, e quindi il saliscendolo QP riceverà un moto circolare alternativo intorno a questo centro. Per determinare l'ampiezza delle sue corse, fatto centro in O, si descrivano due circoli tangenti al perimetro dell'eccentrico, e tali che l'uno sia tutto quanto contenuto nell'interno dell'eccentrico, e l'altro sia tutto esterno al medesimo; la porzione $pP$ dell'arco OS, compresa fra le circonferenze di questi due circoli, darà l'ampiezza della corsa. Non è questo il luogo opportuno per ricercare quale debba essere la natura della curva HIL, acciò il moto del braccio AP sia uniforme; ma, qualunque sia la forma del contorno di un eccentrico dato per determinare la ragione delle velocità angolari del braccio stesso e dell'eccentrico in ciascheduna posizione del meccanismo, basterà tirare la normale MT nel punto di contatto del dente P col perimetro dell'eccentrico, poichè la velocità angolare di questo starà alla velocità angolare del braccio, come la distanza TQ sta alla distanza TO, essendo MT la linea d'azione, e QO la linea dei centri; onde risulta che la condizione, acciò il moto del braccio sia equabile, si riduce a ciò, che la normale MT incontri sempre la linea dei centri nello stesso punto T.

Quanto al descrivere per punti il contorno di un eccentrico atto ad imprimere al dente del saliscendolo un movimento qualunque dato, dopo tutto ciò che abbiamo spiegato nel § 70, ci basterà mandare il lettore alla *fig.* 21, *tav.* 6 nella quale facilmente scorgerà in qual modo, con un metodo tutto analogo a quello insegnato nel § citato, si potrà disegnare l'eccentrico ABCDEFH capace, girando intorno al punto O, di condurre un saliscendolo intorno al punto Q, ed in guisa che la punta del dente percorra innanzi e indietro l'arco circolare AG, descrivendo in successivi intervalli di tempo, corrispondenti ciascuno ad una dodicesima parte di giro dell' eccentrico, gli spazietti diseguali dati *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fh* (1).

(1) Sia $c$ la scambievole distanza de' due punti o assi intorno ai quali girano l'eccentrico e il saliscendolo, e sia $l$ la lunghezza di questo, ossia la distanza della punta del suo dente dal centro del suo movimento. Supponiamo che nella posizione iniziale del meccanismo la punta del dente tocchi il contorno dell'eccentrico all'estremità del raggio minimo $z_0$. In questa posizione, detti $\beta$ e $\gamma$ gli angoli che il raggio $z_0$, e la retta $l$ fanno con la linea dei centri, avremo

$$\left.\begin{array}{l} z_0 \sin\beta - l \sin\gamma = o \\ z_0 \cos\beta + l \cos\gamma = c \end{array}\right\} .$$

Quando poi l'eccentrico avrà descritto intorno al proprio centro l'angolo $\xi$, la punta del dente ne toccherà il contorno all'estremità di un altro raggio $z$, e detti $\psi$ e $v$ i valori che avranno presi gli angoli $\beta$ e $\gamma$ saranno

$$\left.\begin{array}{l} z \sin\psi - l \sin v = o \\ z \cos\psi + l \cos v = c \end{array}\right\} .$$

L'angolo compreso tra i due raggi $z_0$ e $z$ essendo $\beta + \xi - \psi$, il valore di $z$ si avrà sostituendo questo trinomio in vece di $\varphi$ nella equazione polare dell'eccentrico, e sarà

$$z = z_0 f(\beta + \xi - \psi)$$

supponendo che in questa si prenda per linea fissa il raggio vettore $z_0$ e sostituendo per $\psi$ il suo valore tratto dalle equazioni precedenti.

Il saliscendolo intanto avrà descritto l'angolo $v - \gamma$, onde la sua velocità angolare sarà $\frac{dv}{dt}$; a motivo poi delle equabilità del movimento rotatorio dell'eccentrico, per cui detta T la durata di una intiera rivoluzione dell'eccentrico sarà $dt = \mathrm{T}\frac{d\xi}{2\pi}$, avremo ancora

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \frac{dv}{d\xi} .$$

79. Tra le molte applicazioni degli eccentrici impiegati a produrre moto circolare, mi limiterò ad indicare l'uso che se ne fa per contare comodamente il numero dei giri fatti da un albero in un tempo qualunque, per esempio in un giorno intero. Ciò si comprenderà facilmente, purchè al braccio QP della *fig.* 20, *tav.* 6 s'intenda sostituita la leva AB, con l'arpione BD della *fig.* 19, *tav.* 2; poichè è chiaro che ad ogni giro dell'eccentrico, questa leva farà una corsa, l'arpione farà passare un dente della ruota a sega, e così una lancetta fermata sull'albero di questa ruota potrà indicare sopra un quadrante il numero dei denti sospinti dall'arpione, e per conseguenza il numero dei giri dell'eccentrico e dell'albero su cui esso è impernato. Chi ha qualche pratica della costruzione degli orologi comprenderà pure facilmente, come con l'aggiunta di altre ruote si possano contare molti più giri dell'eccentrico, che non abbia denti la ruota a sega G; ma anche di ciò altra volta.

## CAPITOLO DODICESIMO

### DEI BOCCIUOLI.

80. Quando il girar di una piastra piana terminata da un contorno curvilineo qualunque, sospinge innanzi, non più la punta d'una stanghetta come negli esempli dei due ultimi capitoli, ma bensì la costa rettilinea di uno *sprone* come TM (*fig.* 8, *tav.* 2), mantenendosi sempre ad esso filo tangente, questa piastra lascia il nome di *eccentrico*, per prender quello di *bocciuolo*. Dal che si vede, che mentre il punto di contatto con l'eccentrico non cangia mai luogo sulla stanghetta, e descrive insieme con questa una linea retta, il cui prolungamento si fa che passi pel centro del moto della piastra girante, il contatto dello sprone col bocciuolo può venirsi spostando lunghesso lo sprone, ed anche in que' casi in cui esso si mantiene sempre nello stesso punto dello sprone, e descrive nello spazio una retta, questa generalmente non passa pel centro del moto.

Secondo la varia figura del perimetro curvo del bocciuolo, la ragione della sua velocità a quella della stanghetta cui esso dà movimento potrà essere costante, oppure potrà variare da un istante all'altro, epperò vi ha de' bocciuoli *equabili* o di *ragion costante*, e de' bocciuoli di *ragion variabile;* noi tratteremo brevemente di quelli, più brevemente ancora di questi; ma per rendere intelligibile ciò che dobbiam dire dei primi, è necessario che ricordiamo prima la generazione e le proprietà delle curve che i geometri chiamano *evolventi*, ed in ispecial modo della evolvente di circolo.

81. Se sull'arco di circolo ANN'B (*tav.* 7, *fig.* 3) si inviluppa un filo di lunghezza eguale a quella dell'arco medesimo, fermatone uno dei capi in B; poi all'altro capo A del filo stesso si attacca uno stile od una matita, sviluppando il filo e tenendolo sempre ben teso, la matita segnerà un arco di curva AMM'P, tanto più lungo, quanto maggiore sarà stato l'arco di circolo abbracciato dal filo; è questa appunto la curva che chiamasi la *evolvente* del circolo ANB. Il punto A dov'essa prende cominciamento si dice l'*origine* della evolvente; la punta dello stile o della matita è il *punto generatore;* il circolo ANN'B, rispetto alla AMM'P, si chiama la curva *evoluta* o *sviluppata.*

Egli è evidente che la curva descritta sarà ancora la medesima, se invece di attaccare lo stile ad un filo, esso si fermerà all'estremità A di una riga AH (*fig.* 4), e dopo di aver collocata questa in modo che sia tangente al circolo in A, si farà poi girare intorno ad esso in modo che vi si mantenga sempre tangente, passando successivamente nelle posizioni punteggiate MNT, PBH'; in questo movimento la riga non dee però scorrere longitudinalmente contro la circonferenza del circolo, ma sì avere con esso un semplice contatto di sviluppo (capit. 9). In ciò che segue tuttavia, noi supporremo lo stile legato ad un filo flessibile.

Mentre lo stile descrive l'arco AM (*fig.* 13), il filo cui esso è attaccato viene sviluppandosi dalla circonferenza su cui prima era tutto avvolto, e quando lo stile giunge in M, la parte del filo che si applicava sulla circonferenza da N in A, si trova distesa in linea retta da N in M, secondo una direzione tangente al circolo nel punto N; epperò la retta NM è eguale all'arco NA. Mentre poi lo stile descriverà l'arco piccolissimo M*m*, la lunghezza del tratto libero MN varierà pochissimo, e l'archetto M*m* dovrà perciò considerarsi come un arco di circolo che ha il raggio MN ed il centro in N; cioè la linea MN sarà il *raggio di curvatura* dell'archetto M*m*, ed il punto N ne sarà il *centro di curvatura.*

Ora confondendosi $Mm$ con un arco di circolo, la sua tangente MT è perpendicolare al raggio NM; ma questo, come abbiam veduto, è tangente in N al circolo sviluppato, e per conseguenza è perpendicolare al raggio CN; dunque le rette MT, CN perpendicolari alle due estremità di MN sono parallele tra di loro. Quindi conchiudiamo che

*Se da un punto qualunque* M *della evolvente si conduce una tangente* MN *al circolo sviluppato, la parte* MN *di questa tangente compresa tra le due curve è eguale all'arco sviluppato* NA. *E la tangente* MT *condotta alla evolvente nel punto* M *è perpendicolare ad* MN *e parallela al raggio* CN *del circolo sviluppato; od altrimenti, la* tangente *alla evoluta è* normale *alla evolvente* (1).

(1) Per la teorica generale delle *evolute* e delle *evolventi* io deggio rimandare il lettore ai trattati di calcolo infinitesimale; ma l'uso assai frequente che si fa in meccanica pratica delle evolventi di circolo per la costruzione de' bocciuoli, delle ruote dentate, e di altri meccanismi, m'induce a ricordar qui brevemente il modo di formare l'equazione di questa curva, sia che riferiscasi a coordinate rettangole o polari, aggiungendovi la rettificazione e la quadratura della curva medesima.

Sia AM (*tav.* 7, *fig.* 5) un arco di evolvente generato dallo sviluppo dell'arco circolare AN; prendasi per asse delle ascisse il raggio OA condotto all'origine A della curva, e per asse della $y$ il raggio OB perpendicolare ad OA; cosicchè sieno $OP = x$, $PM = y$ le coordinate rettangole del punto M, ed *angolo* $MOP = \varphi$, *raggio vettore* $OM = z$ le sue coordinate polari. Prendasi per unità il raggio OA del circolo, e pongasi $= \psi$ la lunghezza dell'arco AN (eguale a quella della tangente NM), onde sia pure $\psi$ la misura dell'angolo NOA. Finalmente conducasi la PQ parallela ad MN.

I due triangoli rettangoli MOP, MON avendo comune la ipotenusa, ed essendo OQ, e QN le proiezioni di OP, o PM sul raggio ON, si scriveranno tosto le due equazioni

$$x^2 + y^2 = 1 + \psi^2 ; \quad x \cos \psi + y \sin \psi = 1 ;$$

dalle quali eliminando $\psi$ verrà la cercata equazione della curva AM, cioè:

$$x \cos \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + y \sin \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1 \quad \ldots\ldots (1);$$

82. Fingiamo adesso che si abbia una piastra di metallo o di legno, tagliata in forma di evolvente di circolo, come si

trasformando ora le coordinate rettangole in coordinate polari verrà

$$z \cos\left(\varphi - \sqrt{z^2 - 1}\right) = 1 ,$$

ossia

$$\varphi = \sqrt{z^2 - 1} - \text{arco}\left(\cos = \frac{1}{z}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

La rettificazione dell'arco AM deducesi immediatamente da ciò, che l'arco infinitesimo $Mm'$ può riguardarsi come arco circolare descritto con raggio $NM = \psi$, onde, posto questo archetto $= ds$, si ha

$$ds = \psi d\psi , \quad \text{ossia} \quad s = \frac{1}{2}\psi^2 = \frac{1}{2}\left(z^2 - 1\right) ;$$

quindi la lunghezza totale delle prime $n$ spire, ossia dell'arco risultante dallo sviluppo di $n$ circonferenze di circolo sarà $2\pi^2 n^2$ ; e quella di $(n-1)$ spire, $2\pi^2(n-1)^2$ ; onde la $n^{esima}$ spira sarà lunga $2\pi^2(2n-1)$.

Egualmente facile è la quadratura della curva; poichè il triangolo differenziale $MNm$, elemento dell'area AMN compresa fra l'arco circolare AN, la sua tangente NM, e l'arco di evolvente AM, è manifestamente $= \frac{1}{2}\psi^2 d\psi$ , epperò

$$\text{arco AMN} = \frac{1}{6}\psi^3 = \frac{1}{6}\left(z^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}} .$$

Che se si consideri l'area OAM compreso fra la linea fissa OA, il raggio vettore OM, e l'arco di evolvente AM, l'elemento di questa sarà $\frac{1}{2}z^2 d\varphi$; ma dalle precedenti equazioni facilmente si traggono

$$z^2 = 1 + \psi^2 , \qquad \varphi = \psi - \text{arc. tang}\,\psi ;$$

onde

$$\frac{1}{2}z^2 d\varphi = \frac{1}{2}\psi^2 d\psi$$

ed

$$\text{area OAM} = \frac{1}{6}\psi^3 = \text{area AMN} ,$$

come ben potea prevedersi, dovendosi riguardare i due elementi $\frac{1}{2}\psi^2 d\psi$ ed $\frac{1}{2}z^2 d\varphi$ come due triangoli aventi entrambi per base l'archetto $Mm$ della curva, ed i loro vertici sul raggio ON, parallelo alla tangente condotta al punto M.

vede in AMPB (*tav.* 7, *fig.* 6). Collocata questa piastra in un piano verticale, facciamole prendere, girandola intorno al centro C, una posizione qualunque; tiriamo poi il raggio orizzontale CN del circolo sviluppato, e pel punto N la tangente verticale NM; il punto M del contorno dove questa verticale verrà a ferire, avrà la sua tangente MT parallela a CN, cioè orizzontale. Facciamo ora girare la piastra nel proprio piano intorno al centro C, cosicchè l'origine A della curva descriva l'arco di circolo A*a*, e la piastra prenda una nuova posizione *ampb*; la verticale condotta pel punto N verrà ora incontrare il contorno curvo in un nuovo punto *m*, ma la tangente *mt* a questo punto *m* dovendo ancora essere parallela al raggio CN ed alla tangente MT, segue dalla proprietà della evolvente testè dimostrata, che il nuovo punto di contatto *m* cadrà sulla medesima verticale di M. Di più si sa che NM è eguale all'arco NA, e che N*m* è eguale all'arco N*a*; dunque la differenza tra N*m* ed NM, cioè la distanza M*m* delle due tangenti, sarà eguale all'arco A*a* descritto dal punto A nella rotazione della piastra.

Scorgesi da tutto ciò che se la tangente MT sarà uno sprone materiale unito a squadra con la spranga EF, e se questa potrà scorrere longitudinalmente fra le guide G, G; girando la piastra intorno al centro C, essa sospingerà all'insù lo sprone MT e la spranga con cui questo è connesso; e lo spazio descritto da questa sarà sempre eguale all'arco percorso dal punto A. Il moto rettilineo della spranga EF sarà dunque equabile, se è equabile il moto rotatorio della piastra, che sarà un bocciuolo atto a trasformare il moto equabile circolare, in moto equabile e rettilineo.

Se ora si continuerà a far girare la piastra finchè il punto B abbia descritto tutto l'arco BN, e la piastra abbia presa la posizione punteggiata N*p'a'*, la linea BP sarà divenuta verticale, la riga MT si sarà sollevata in *p't'* all'altezza N*p'* eguale all'arco sviluppato N*a'*, ossia BNA, e la punta *p'* del bocciuolo scappando dal contatto dello sprone, lascierà questo e la spranga in libertà di ricadere per proprio peso. Se noi supponiamo di più che siavi qualche arresto, che impedisca che in questa caduta lo sprone MT passi al dissotto della orizzontale CD, la piastra seguitando a girare lo incontrerà una seconda volta, tornerà a sollevarlo in $p't'$, poi lo lascierà ricadere, e così senza fine.

Con questa disposizione adunque girando equabilmente il bocciuolo APB, la spranga EF è sollevata equabilmente, e lo spazio da essa descritto è sempre eguale all'arco percorso da un punto qualunque della circonferenza BNA. In altre parole la spranga vien sollevata precisamente come se, tolto via il bocciuolo, e collocata la spranga in $p'$MN tangenzialmente alla circonferenza di una ruota eguale al circolo sviluppato ANB, questa la sollevasse o per via del solo attrito, o per mezzo di una coreggia di lunghezza eguale all'arco ANB, e di cui un capo fosse fermato in A sulla circonferenza della ruota, e l'altro sulla spranga, in modo tutto simile a quello rappresentato nella *tav.* 2, *fig.* 17. Il circolo ANB, la cui velocità è eguale a quella della spranga FE, si suol chiamare il *circolo primitivo del bocciuolo.*

83. Tale è il meccanismo, mercè del quale un albero orizzontale KH (*tav.* 2, *fig.* 8) girando equabilmente sui suoi perni C, solleva un pestello EF con moto equabile, e lo lascia ricadere sulla materia da pestare contenuta nella pila R; meccanismo generalmente impiegato nella fabbricazione della polvere, nella brillatura del riso e in altre manifatture. Nel pestello è saldamente conficcato lo sprone orizzontale TM, e il bocciuolo KMPQ premendo questo sprone in M, lo sospinge all'insù con tutto il pestello. La parte MP del contorno curvilineo del bocciuolo, che è la sola che venga in contatto con lo sprone, è tagliata secondo un arco di evolvente del circolo QH tangente alla retta verticale su cui il punto M si muove; l'ampiezza della curva MP è tale, che la lunghezza dell'arco sviluppato nel descriverla sia precisamente eguale

all'altezza dalla quale il pestello debbe ricadere: la parte del contorno del bocciuolo, contenuta entro il circolo primitivo QH, non venendo mai in contatto con lo sprone, si può fare di qualunque forma; la parte posteriore PQ va tagliata in modo che non sia d'impaccio alla caduta del pestello.

Disponendo diversi bocciuoli sulla circonferenza dell'albero, il pestello sarà sollevato altrettante volte a ciaschedun giro; vi dovrà però essere tanta distanza tra un bocciuolo e l'altro, e la velocità dell'albero dovrà essere regolata in modo che lo sprone abbia il tempo di ricadere, prima che un nuovo bocciuolo si presenti per rialzarlo (1).

La stessa forma fin qui descritta serve pei bocciuoli, che sospingono e risospingono l'andivieni della *tav.* 2, *fig.* 9. Per l'equabilità del moto la parte del loro contorno, che viene a toccar le palette, o gli sproni C, C', debb'essere tagliata in forma di evolvente della circonferenza tangente alle rette descritte dalle estremità degli sproni medesimi. Si evitano alcune difficoltà, sostituendo alla disposizione della *tav.* 2, *fig.* 9 quella della *tav.* 7, *fig.* 8, nella quale un solo bocciuolo MQP spinge a vicenda le due palette A, B dell'andivieni; la curva

(1) La equabilità del movimento ascendente del pestello ben lungi dall'essere condizione essenziale ad osservarsi è anzi in se stessa un vizio che gioverebbe cansare tagliando il bocciuolo in guisa da produrre un movimento accelerato in principio, ritardato in sul finire della salita. La disposizione rappresentata nelle *tav.* 2, *fig.* 8 e *tav.* 7, *fig.* 6 generalmente seguita ne' molini da pestare, ha un altro maggior vizio in ciò, che la pressione del bocciuolo contro lo sprone, esercitandosi in M, fuori della verticale del *centro di gravità* del pestone, fa nascere pressioni e quindi attriti tra il pestone stesso e le guide G, G' che ne dirigono il movimento. A ciò si ovvierebbe disponendo le cose come si veggono nella *tav.* 7, *fig.* 7: invece di uno sprone sporgente di fronte, il pestello porta qui due *ascialoni* o *beccatelli* inchiodati sui suoi fianchi, quasi in forma di croce, e i bocciuoli collocati per coppie, uno di qua, l'altro di là del pestello, operando ciascuno sovra uno de' beccatelli, sollevano il pestello a piombo, senza dar luogo a pressioni contro le guide.

del suo contorno debbe avere tanta ampiezza, che le due tangenti condotte alle sue estremità sieno fra loro parallele. La figura suppone che il bocciuolo sia in un piano un po' elevato al dissopra di quello in cui scorre il telaio EF, e che le palette abbiano sopra di questo tanto risalto da poter essere incontrate dal bocciuolo.

84. Fin qui dei bocciuoli equabili; diciam ora qualche cosa di quelli di ragion variabile. Sia, per esempio, la piastra circolare eccentrica PQR (*tav.* 7, *fig.* 9), di cui il centro di figura è in C, il centro del moto in O, e l'eccentricità per conseguenza eguale ad OC. Girando essa fra i due sproni IG, KH, calettati ad angolo retto nella stanga SS', e distanti tra loro poco più che di un diametro della piastra, è manifesto che questa, premendo or l'uno, or l'altro sprone col suo contorno, menerà la stanga innanzi e indietro; e un momento di attenzione farà comprendere, che questo meccanismo non differisce in nulla di essenziale da quello della *tav.* 7, *fig.* 1 (§ 75), se non che all'asticciuola C si è qui sostituita una piastra di diametro molto maggiore, il quale non ha però veruna influenza nè sull'ampiezza delle corse, nè sulla natura del movimento della stanga; e da ciò si concluderà che nel bocciuolo circolare che stiamo considerando, la velocità della stanga starà in ciascuno istante a quella del centro C del bocciuolo, come QH, oppure CF sta alla eccentricità OC. La qual cosa si può direttamente dimostrare, osservando che l'azione del bocciuolo sarà la stessa come quella di un tirante CQ, connesso con le braccia OC e QK; e che le direzioni di queste incontrandosi in K, la velocità della stanga starà a quella del punto C, come KQ al KC, oppure come CF : CO.

Noi siamo ora in grado di comprendere perfettamente il gioco del bocciuolo triangolare della *fig.* 5, *tav.* 2. Supponiamo infatti che esso giri intorno al punto C, e che la retta condotta da questo punto all'angolo B sia giunta in una posizione in cui faccia angolo di 30° sopra l'orizonte: il lato superiore del telaio sarà allora tangente all'arco CB nel punto B, e continuando la rotazione del bocciuolo, il suo angolo B sospingerà il telaio all'insù precisamente come la caviglia della manovella della *tav.* 7, *fig.* 1, e questa azione si proseguirà per un sesto di giro, cioè fintantochè il punto B sia venuto sulla verticale che passa pel centro C. Allora il lato superiore del telaio sarà tangente in B, non più all'arco CB, ma bensì all'arco BA, descritto dal centro C, epperò, tutti i punti di quest'arco essendo a egual distanza dal centro del moto, il telaio starà fermo durante un sesto di giro del bocciuolo, cioè fino a che l'angolo A sia venuto esso sulla verticale del centro C, e l'angolo B a sessanta gradi a sinistra di questa verticale. Ma allora il lato CB comincierà a toccare con la sua estremità C il lato inferiore del telaio, e per un sesto di giro il bocciuolo opererà precisamente come la piastra circolare dell'esempio precedente, nella quale si fosse fatta la eccentricità eguale al raggio, poichè il centro del moto C sarà sulla circonferenza stessa CB: e quindi in questo terzo periodo del movimento il telaio e la stanghetta discenderanno con moto affatto simile a quello del meccanismo della *tav.* 7, *fig.* 1. Così il bocciuolo avrà fatta una mezza rivoluzione, e nella mezza rivoluzione seguente si ripeteranno nel moto del telaio le medesime vicende, con lo stesso ordine, ma per verso contrario. Facile riesce quindi la costruzione della curva rappresentatrice del movimento comunicato al telaio: poichè presi sulla linea AG dei tempi (*tav.* 2, *fig.* 5$^{bis}$) sei tratti eguali AB, BC, CD, DE, EF, FG per rappresentare le sei parti in cui abbiamo divisa la durata di una rivoluzione del bocciuolo, al primo tratto corrisponde una curva *ab* ascendente e convessa, al secondo una retta orizzontale *bc*, al terzo e al quarto una curva *cDe* discendente, prima convessa poi concava, al quinto una retta orizzontale *ef* ed al sesto una curva ascendente e concava *fg*: il lettore farà cosa utile a costruirne egli medesimo la figura regolare in iscala molto maggiore.

85. Generalmente, dato il contorno di un bocciuolo, si determinerà come segue la legge, con la quale esso solleverà lo sprone rettilineo con cui è in contatto. Si conduca la tangente a qualunque punto del contorno, e su questa tangente si abbassi dal centro del moto una perpendicolare; la lunghezza di questa sarà manifestamente eguale alla distanza dello sprone dal centro del movimento, corrispondente a quella posizione del bocciuolo, nella quale la perpendicolare medesima sarà parallela alla retta secondo la quale si muove la stanga. Tirando adunque alla curva un numero qualsivoglia di tangenti, che facciano tra di loro angoli eguali, e misurando le perpendicolari corrispondenti, la differenza tra due di queste perpendicolari darà lo spazio descritto dallo sprone, mentre il bocciuolo descrive l'angolo compreso tra le perpendicolari medesime.

Proponiamoci ancora il problema inverso, il quale consiste nel determinare la forma conveniente per un bocciuolo che debba sollevare la stanga con legge data qualunque. Sia O (*tav.* 7, *fig.* 10) il centro del movimento del bocciuolo; AT la posizione più bassa dello sprone, e descrivendo quello gli angoli eguali $q$OI, IOL, LOM, MON, NOP, POQ, vogliasi che questo si venga successivamente sollevando in $i$, $l$, $m$, $n$, $p$, $q$. Sui raggi indefiniti OI, OL, OM, ON, OP, OQ si portino le lunghezze $Oi'=Oi$, $Ol'=Ol$, $Om'=Om$, $On'=On$, $Op'=Op$, $OQ=Oq$: e nei punti $i'$, $l'$, $m'$, $n'$, $p'$, Q$'$ ergansi sui raggi rispettivi altrettante perpendicolari; la curva tangente a tutte queste perpendicolari, ossia inscritta nel poligono ch'esse formano, sarà il contorno del bocciuolo domandato. Egli è evidente, infatti, che quando il raggio $Op'$, per esempio, pel giro del bocciuolo sarà venuto in $Op$, lo sprone che nel suo movimento è costretto a rimaner sempre orizzontale, prenderà la posizione della tangente $p't$, e per conseguenza si sarà sollevato all'altezza $Op'=Op$.

Il lettore scorgerà da sè come andrebbe modificata questa costruzione, se il filo dello sprone, invece di essere rettilineo, fosse tagliato secondo qualsivoglia curva data (1).

(1) Traduciamo qui in analisi i due problemi graficamente risoluti nel testo.

1° Data l'equazione della curva del bocciuolo, trovare la legge del movimento dello sprone.

Prendasi per asse della $x$ quello fra i diametri del bocciuolo che è verticale nella posizione iniziale di questo; quand'esso avrà descritto l'angolo $\psi$, lo sprone sempre orizzontale farà con la nuova posizione dell'asse della $x$ l'angolo complemento di $\psi$: epperò le coordinate del suo punto di contatto con la curva del bocciuolo dovranno soddisfare alla condizione

$$\frac{dx}{dy} + \tang \psi = o \ ,$$

la quale unitamente alla equazione della curva determinerà le coordinate $x$, $y$ del punto di contatto. In questa posizione del bocciuolo la distanza dello sprone dal centro del moto sarà la perpendicolare abbassata dall'origine delle coordinate sulla tangente condotta al punto $x$, $y$: perpendicolare che è manifestamente

$$\lambda = x \cos \psi + y \sin \psi \ ;$$

onde mettendo qui per $x$ ed $y$ i loro valori, avremo per ogni valore di $\psi$ il corrispondente valore di $\lambda$, cioè la posizione dello sprone: che è ciò che si domandava.

2° Data la legge del movimento dello sprone, trovare l'equazione del contorno del bocciuolo.

Poichè è data la legge del movimento dello sprone, si avrà $\lambda$ in funzione di $\psi$; epperò la soluzione della quistione consisterà nella eliminazione di $\psi$ tra le due equazioni

$$\frac{dx}{dy} + \tang \psi = o \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) ;$$

$$x \cos \psi + y \sin \psi = \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Notisi che la seconda equazione differenziata darebbe

$$dx \cos \psi + dy \sin \psi + y \cos \psi \, d\psi - x \sin \psi \, d\psi = d\lambda \ ;$$

e che in virtù della prima questa si riduce ad

$$y \cos\psi - x \sin\psi = \frac{d\lambda}{d\psi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (3).$$

Onde il problema si potrà pur dire ridotto alla eliminazione di $\psi$ tra le equazioni (2) e (3); ed infatti la curva domandata essendo il luogo geometrico di tutte le tangenti rappresentate dalla equazione (2) col dare in questa equazione una infinità di valori continuamente crescenti alla variabile $\psi$, l'equazione di questo luogo geometrico dee appunto risultare dalla eliminazione di $\psi$, tra l'equazione (2), ed il differenziale della medesima equazione, preso col far variare in essa la sola $\psi$, cioè col riguardare $x$ ed $y$ come costanti.

Vogliasi per esempio che lo spazio $\lambda$ descritto dallo sprone cresca proporzionalmente all'angolo $\psi$, e pongasi $\lambda = a\psi$; le equazioni (2) e (3) diverranno

$$\left.\begin{aligned} x \cos\psi + y \sin\psi &= a\,\psi \\ y \cos\psi - x \sin\psi &= a' \end{aligned}\right\} ;$$

le quali fattovi $a = 1$, e mutatovi $x$ in $y$ ed $y$ in $x$, conducono alla medesima equazione, che in una nota precedente (§ 81, pag. 119) abbiamo trovato per la evolvente di circolo.

## CAPITOLO TREDICESIMO

### DEI BOCCIUOLI CILINDRICI E CONICI, DELLE ELICHE E DELLE VITI.

86. I cilindri ed i coni, retti e circolari, avendo superficie sviluppabili (1) di rivoluzione, ci porgono un comodo mezzo di trasformare il moto circolare intorno un dato asse, in moto rettilineo secondo una direzione parallela od inclinata all'asse medesimo, e danno origine così ad una numerosa famiglia di meccanismi semplici, dei quali, a motivo della loro importanza e dell'uso frequente che se ne fa nelle arti, noi dobbiamo ora trattare alquanto diffusamente.

Sulla superficie di un cilindro CC' volubile intorno al proprio asse AB (*tav.* 7, *fig.* 11), si segni una curva di qualunque figura, ma però tale, che in nessun luogo la sua tangente non sia parallela all'asse del cilindro; e secondo l'andamento di questa curva si scolpisca nella sostanza del cilindro una scanalatura *abcd;* si disponga poi parallelamente all'asse una stanghetta MN armata di un dente D, la cui punta entri liberamente nella scanalatura *abcd;* al girar del cilindro la stanghetta sarà sospinta a destra od a sinistra, e se la curva del canaletto sarà una curva rientrante, il moto della stanghetta sarà alternativo. A questo meccanismo noi daremo il nome di *bocciuolo cilindrico.*

Immaginiamo che siasi inviluppato sulla superficie convessa del cilindro un sottile foglio di carta, e che sopra di questo siasi segnata la traccia della scanalatura sottoposta; acciò il

(1) *Sviluppabili* diconsi quelle superficie, sulle quali un foglio di carta od una lastra qualunque flessibile e naturalmente piana si può applicare puntualmente senza grinze e senza straccialure.

foglio puntualmente rivesta tutto il cilindro sarà mestieri che abbia la medesima altezza di questo, e che la sua larghezza sia eguale allo sviluppo della circonferenza della base di esso. Sviluppando poi questo foglio avremo un rettangolo, sul quale resterà segnata una certa curva, che sarà la traccia della scanalatura *abcd;* e se faremo costruire un cuneo, il cui filo segua precisamente l'andamento della curva così sviluppata, facendo correre questo cuneo perpendicolarmente alla direzione della stanghetta, in modo che il suo filo prema contro il dente D, questo dente riceverà precisamente lo stesso movimento che prima riceveva dalla rotazione del cilindro.

Cose analoghe si posson pur dire del *bocciuolo conico* della *fig.* 12; ma qui la direzione della stanghetta debb' essere parallela, non già all'asse AB, ma bensì al lato LC′ del cono; e sviluppando in piano la superficie di questo, ne risulterà, non più un rettangolo, ma un settore circolare che serberà la traccia curva della scanalatura *abcd.* Tagliando la superficie così sviluppata secondo l'andamento di questa curva, la parte della superficie compresa tra la curva medesima ed il centro del settore si potrà impiegare a modo di eccentrico, il quale girando intorno al centro medesimo e sospingendo la stanghetta col suo perimetro curvo, le comunicherà precisamente lo stesso movimento che prima le veniva comunicato dall'azione dei margini della scanalatura scolpita sulla superficie del cono.

Da ciò si comprende che i bocciuoli cilindrici si possono riguardare come cunei inviluppati sulla superficie di un cilindro, e i bocciuoli conici come eccentrici inviluppati sulla superficie di un cono; e che come i cunei e gli eccentrici, essi possono per conseguenza servire alla trasformazione di un moto equabile in un altro moto equabile, oppure in un moto vario, secondo la scelta della curva della scanalatura che guida il dente della stanghetta. Noi tratteremo particolarmente de' casi di moto equabile, cioè di quelli in cui è costante la ragione tra la velocità di rotazione del cilindro o del cono, e la velocità del moto rettilineo della stanghetta, perchè questi casi sono nelle applicazioni incomparabilmente più frequenti degli altri; e per la medesima ragione ci fermeremo assai più sui bocciuoli cilindrici che sui conici, e verremo così condotti in modo facile e naturale ad esporre la costruzione e le proprietà geometriche di uno de' meccanismi più conosciuti e più utili, cioè della *vite*.

87. Dato il cilindro ABCD (*fig.* 13), si tagli in un foglio di carta un triangolo rettangolo EGF di altezza EF eguale a quella del cilindro, e di base EG eguale ad un numero intero di volte la circonferenza della base AB del cilindro, per esempio, a due volte questa circonferenza. Si applichi il lato EF del triangolo sul lato AC del cilindro, poi s'inviluppi la carta sul cilindro a tanti giri quanto la sua lunghezza EG lo consente, che sarà a due giri. Il lembo o filo inclinato FG si disporrà secondo una certa curva ANLKC, che darà essa pure due volte intorno al cilindro, cioè sarà composta di due *spire* CKL ed LNA; ciascuna spira, come CKL, avrà una sua metà KL sulla parte anteriore e visibile del cilindro, e l'altra metà CK sulla parte posteriore ed invisibile. Questa curva, la quale chiamasi *elica cilindrica* ed anche semplicemente *elica*, è in tutti i suoi punti egualmente inclinata al lato del cilindro, cioè fa dapertutto con esso il medesimo angolo GEF che l'ipotenusa FG del triangolo EGF fa come l'altezza EF; la distanza CL di due spire, misurata secondo il lato del cilindro, chiamasi il *passo* dell'elica ed è la stessa dapertutto, cioè la distanza CL è eguale ad *hm*, eguale a KN, eguale a LA, ed eguale ancora all'altezza comune AC del cilindro e del triangolo, divisa pel numero delle spire. Partendo dal punto A la curva a ciascun giro si discosta di un passo dalla base AB, e se ne scosta per conseguenza di due passi per due giri, di tre passi per tre giri, e via discorrendo; e similmente la curva si scosta dalla base di un mezzo passo BN

per un mezzo giro, di un quarto di passo per un quarto di giro ecc. Cioè la distanza H$m$ di un punto qualunque $m$ della curva dalla base AB, è proporzionale al numero dei giri che si debbon fare camminando su per la curva intorno al cilindro per passare dal punto A al punto $m$.

Da ciò deriva l'uso dell'elica per trasmettere un movimento equabile; è chiaro infatti che se la scanalatura *abcd* (*fig.* 11) seguirà l'andamento dell'elica KLMNPQ (*fig.* 13), girando equabilmente il cilindro AB intorno al proprio asse, il dente e la stanghetta saranno sospinti equabilmente secondo la lunghezza del cilindro, cioè ad ogni giro avanzeranno della lunghezza di un passo, e ad ogni frazione di giro, di una egual frazione di passo; la qual cosa risulta d'altronde evidente per ciò stesso, che la elica non è altro insomma che il filo di un cuneo rettilineo od equabile inviluppato sulla superficie del cilindro; epperò la velocità della stanghetta stà a quella con cui si muovono tutti i punti della superficie del cilindro, come il passo dell'elica, alla circonferenza della base del cilindro.

88. Quando l'elica dee avere un numero grande di spire la costruzione testè insegnata non va esente da alcuni inconvenienti; infatti la base EG del triangolo EFG (*fig.* 13) dovendo contenere tante volte la circonferenza del cilindro, quante sono le spire che si debbono segnare, diverrebbe di incomoda lunghezza; e i tanti doppi che la carta farebbe poi sul cilindro ne altererebbero il diametro ingrossandolo dall'alto al basso; scevra da entrambi questi sconci è l'altra costruzione rappresentata nella *fig.* 15. Si prenda un foglio rettangolo EFGI di altezza EF eguale a quella del cilindro, e di base EI eguale allo sviluppo della circonferenza di esso; l'altezza EF si divida in tante parti eguali quante debbono essere le spire, e si conducano per tutti i punti di divisione le rette $aa'$, $bb'$, $cc'$, $dd'$ parallele alla base EI, e le diagonali E$a'$, $ab'$, $bc'$, $cd'$, $d$G'; inviluppando il foglio sul cilindro, queste

diagonali si disporranno secondo le spire dell'elica domandata, venendo a congiungersi I con E, $a'$ con $a$, $b'$ con $b$, $c'$ con $c$ ..... e G con F.

L'elica può pure costruirsi geometricamente così: si divida la circonferenza della base del cilindro in qualsivoglia numero di parti eguali, per esempio, in otto parti, e si notino i punti di divisione coi numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; per questi punti si conducano tante rette parallele all'asse del cilindro, cioè tanti lati, poi su quello che passa pel punto 1, e partendo da questo punto si porti una distanza eguale all'ottava parte del passo; sul lato condotto pel punto 2 si portino due ottavi di passo; sul lato condotto pel punto 3 si portino tre ottavi di passo, e così di seguito, finchè sul lato che passa pel punto 0 si sia portato un passo intero; i punti così segnati sulla superficie del cilindro, uniti tra loro partendo dal punto 0 con una curva continua, daranno la prima spira dell'elica. Se poi partendo da ciascuno degli otto punti così determinati, si porterà sugli otto lati corrispondenti del cilindro una distanza eguale al passo dell'elica, i nuovi punti così trovati daranno la seconda spira; e portando un'altra volta al dissopra di questa una distanza eguale al passo, si avranno otto punti della terza spira, e così di seguito, finchè si giunga alla base superiore del cilindro (1).

Guardando una elica segnata sopra un cilindro verticale, essa potrà andar salendo da sinistra verso destra, come nelle *figg.* 13 e 15, o da destra verso sinistra come nella *fig.* 16: nel primo caso l'elica si dice *destra*, nel secondo *sinistra*.

(1) Prendendo per assi delle $x$, $y$ due diametri ortogonali della base, e per asse della $z$ quello stesso del cilindro, e supponendo che la curva passi pel punto in cui l'asse positivo della $x$ incontra la circonferenza della base, le proiezioni della curva sui tre piani coordinati saranno rappresentate dalle tre equazioni seguenti, nelle quali $r$ è il raggio del cilindro, e $h$ il passo dell'elica:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r\cos\frac{2\pi z}{h}, \quad y = r\sin\frac{2\pi z}{h}:$$

89. Facilmente si comprenderà ora l'uso della macchinetta della *fig.* 17 per segnare una elica di *passo* dato sopra un dato cilindro AC. L'asse di questo cilindro porta un rocchetto o fuso R di circonferenza eguale al passo dell'elica che si vuol tracciare, e a questo rocchetto si attacca un filo, il quale ripiegandosi sulla girella F, va con l'altro capo ad attaccarsi ad un carretto D armato di uno stile o bulino DE e mobile lungo la guida GG, parallela all'asse del cilindro; ad ogni giro il rocchetto raccoglie una lunghezza di filo eguale alla sua propria circonferenza, e di altrettanto si avanza il carretto sulla sua guida, epperò esso si muove equabilmente in

e la lunghezza di un arco qualunque dell'elica sarà eguale a quella dell'arco di circolo su cui esso si proietta nel piano delle $xy$, moltiplicata per

$$\frac{\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}}{2\pi r}.$$

I due archi infinitesimi $d\sigma$ e $ds$, l'uno sull'elica, l'altro sul circolo, avranno la medesima saetta $\varepsilon$; e potendo le loro lunghezze confondersi con quelle delle rispettive tangenti, detto $\gamma$ il raggio di curvatura del primo,

sarà $\quad d\sigma^2 = 2\gamma\varepsilon, \quad ds^2 = 2r\varepsilon$; epperò $\gamma = r\dfrac{d\sigma^2}{ds^2}$:

ossia $$\gamma = \frac{4\pi^2 r^2 + h^2}{4\pi^2 r} = r + \frac{h^2}{4\pi^2 r}.$$

Se si concepisca una retta, la quale si muova facendo sempre l'angolo $\delta$ con l'asse del cilindro, e passando sempre per quell'asse e per la curva, essa genererà una superficie sghemba che conterrà una infinità di eliche, tutte descritte col passo $h$ sopra infiniti cilindri aventi tutti il medesimo asse. Questa superficie, che è quella del *pane triangolare* delle viti (Vedi nel testo i §§ 91 e 92) avrà per equazione

$$z = \left(r + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\operatorname{colang}\delta + \frac{h}{2\pi}\,\text{arc. tang}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ponendo in questa $\delta = \frac{1}{2}\pi$ la retta generatrice diverrà perpendicolare linea retta, quando il cilindro gira equabilmente sul suo asse; la curva CE tracciata dalla punta del bulino sulla superficie del cilindro è dunque una elica.

Se al rocchetto cilindrico R si sostituisse il rocchetto *a* conico e divergente, si otterrebbe una curva di passo uniformemente crescente; e sviluppato il foglio si avrebbe una curva concava; viceversa col rocchetto conico e convergente *b* il passo sarebbe uniformemente decrescente, e la curva sviluppata sarebbe convessa; con un rocchetto di profilo convesso come C, il passo verrebbe crescendo, ma non uniformemente. Così conoscendo la forma del rocchetto possiamo

all'asse, e la superficie da essa generata sarà quella che limita di sopra e di sotto il *pane quadrato* delle viti (§ 91), la cui equazione sarà per conseguenza

$$y = x \operatorname{tang} \frac{2 \pi z}{h}.$$

Su questa superficie le due eliche descritte sui cilindri di raggi $r$ ed $r + dr$, comprendono una zona la cui area, per ciascuna spira, è

$$dr \sqrt{4 \pi^2 r^2 + h^2};$$

integrando da $r = o$ fino ad $r = r$ si avrà dunque per la porzione di superficie contenuta entro il cilindro di raggio $r$, il valore

$$\frac{1}{2} r \sqrt{4 \pi^2 r^2 + h^2} + \frac{h^2}{2 \pi} \operatorname{Log} \frac{2 \pi r + \sqrt{4 \pi^2 r^2 + h^2}}{h};$$

onde facilmente si concluderà che la superficie *totale* di una spira di *pane rettangolare* supposto di larghezza $\lambda$ sarà

$$2 \pi r \lambda + \frac{h^2}{2 \pi} \operatorname{Log} \frac{2 \pi r' + \sqrt{4 \pi^2 r'^2 + h^2}}{2 \pi r + \sqrt{4 \pi^2 r^2 + h^2}}$$

essendo $r$ ed $r'$ i raggi delle due superficie cilindriche tra le quali il *pane* è compreso.

prevedere quale sarà la curva descritta, e viceversa dalla curva descritta potremmo concludere quale sia stata la forma del rocchetto impiegato.

Quindi si scorge, che qualora, levato via il filo RFD, il carretto fosse mosso da una forza qualunque e con qualunque legge, la natura della curva descritta dal bulino sul cilindro farebbe tosto riconoscere se il moto del carretto sia stato equabile o no; poichè nel primo caso la curva sarà una elica perfettamente regolare, mentre nel secondo le sue spire si andranno allargando da C verso A se il moto è stato accelerato, o restringendo se il moto è stato ritardato. Sostituendo dunque al bulino DE un lapis od un pennello, che lasci una traccia visibile sopra un foglio di carta avvolto sul cilindro AC, questo foglio sviluppato in piano farà conoscere tutti quanti gli accidenti del movimento della stanghetta, poichè resterà sopra di esso segnata la medesima curva, come se il foglio fosse stato disteso sopra una tavoletta piana che si muovesse equabilmente in linea retta nel modo descritto nel § 65. Ognun comprende quanto sia vantaggioso il sostituir così un cilindro, il cui movimento si può continuare indefinitamente, ad una tavoletta, la cui corsa è necessariamente limitata, permettendo questa sostituzione di raccogliere sul medesimo foglio di carta le indicazioni dello stromento per un intervallo assai maggiore di tempo.

Fin dal 1790 il nostro fisico Vassalli-Eandi proponea di impiegare un consimile meccanismo per raccogliere sopra un foglio avviluppato sulla superficie di un tamburro le indicazioni del barometro e del termometro; più tardi egli tentava di applicare lo stesso mezzo alle osservazioni sulla direzione e sulla forza dei venti (1).

90. Se s'impiegasse a dar moto ad una stanghetta un cilindro, in cui fosse scolpita una scanalatura secondo una curva

(1) V., Description d'un Météorographe etc. Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino. Tom. XII.

differente dall'elica, tale cioè che la sua inclinazione andasse variando da un punto all'altro, il lettore comprende senz'altra dimostrazione, che per determinare la ragion della velocità della stanghetta in ciascuna delle sue posizioni, alla velocità di rotazione del cilindro, basterebbe condurre una tangente a quel punto della curva, in cui si suppone pervenuto il dente della stanghetta e costruendo un triangolo rettangolo, in cui uno degli angoli acuti fosse eguale a quello che la tangente ora detta fa col lato del cilindro, il cateto adiacente a quest'angolo, starebbe al cateto opposto, come la velocità della stanghetta sta a quella, che è comune a tutti i punti della superficie del cilindro.

91. Torniamo ora al nostro argomento principale, cioè all'uso che si può fare dell'elica per la trasmissione del moto equabile; già abbiamo notato che col cilindro scanalato a elica della *fig.* 14, la stanghetta sarà sospinta da un'estremità all'altra del cilindro con velocità sempre proporzionale a quella della rotazione di esso, e diretta verso destra o verso sinistra, secondo che la rotazione si farà per un verso o pel verso contrario (1); lo stesso effetto precisamente avrà luogo

(1) Merita di essere qui descritta una ingegnosa applicazione dell'elica, per produrre un movimento rettilineo alternativo. Sopra uno stesso cilindro (*tav.* 7, *fig.* 18) sono scolpite due scanalature secondo due eliche opposte, cioè una *destra*, l'altra *sinistra*, le quali avendo la medesima origine e il medesimo termine, imboccano l'una nell'altra e formano un circuito chiuso; il dente della stanghetta è fatto a modo di *nottola*, cioè libero di girare sopra un pernio e di adattarsi così alternativamente alla opposta inclinazione delle due eliche. Girando dunque il cilindro sempre pel medesimo verso, il dente è sospinto da una estremità all'altra di esso in una delle eliche; poi imboccando nell'elica opposta viene risospinto pel verso contrario sino all'altra estremità del cilindro, e così senza fine. Ma acciò questo giro succeda è necessario che le due eliche abbiano un passo non troppo grande rispetto al raggio del cilindro, e che ne' due capi in cui s'imboccano, sieno *raccordate* in modo che l'inclinazione non cangi tutto d'un tratto, ma vada gradatamente variando da un'elica all'altra.

se il cilindro invece di una scanalatura porterà un risalto di forma elicoidale (*fig.* 19), e se la stanghetta avrà due denti vicini, tra i quali si trovi abbracciato il risalto dell'elica. Un tal cilindro non è altro che una *vite:* il risalto elicoidale che lo ricinge è il *pane*, o *verme*, o *filo della vite;* la distanza tra due spire successive è il *passo della vite;* eguale manifestamente al passo dell'elica impiegata a costruirla.

In pratica però le viti non soglion farsi con spire così lontane come quelle della *fig.* 19; anzi, la forma del pane e la lunghezza del passo si fanno tali che il vano, che resta tra una spira e l'altra, sia della medesima forma e della medesima larghezza del pane. Così nella vite di filo quadrato (*fig.* 20 *a*) il passo è doppio della larghezza del pane; e nella vite di filo triangolare (*fig.* 20 *b*), il passo è eguale alla larghezza del pane; quindi queste due specie di viti spaccate secondo il loro asse, danno le sezioni rappresentate nelle parti superiori delle figure citate.

Qualunque sia la forma del pane della vite, la comunicazione del movimento si può fare per mezzo di un *pettine* di profilo conveniente (*tav.* 7, *fig.* 22). Meglio però che i pettini giovano a quest' uopo le *chiocciole* o *madreviti*, che sono viti simili in tutto a quelle cui debbono adattarsi, ma scolpite nella parete di una cavità cilindrica, invece di essere rilevate sulla superficie di un cilindro solido. Quando una vite è incastrata nella sua chiocciola (*figg.* 23 e 24), il verme della vite empie i vani della chiocciola, e viceversa il verme di questa si alloga nei vani di quella. Una chiocciola insomma equivale ad una infinità di pettini disposti intorno intorno alla vite in piani tutti diretti verso l'asse di essa, e non vi ha altra essenzial differenza tra l'uso del pettine e quello della chiocciola, se non che con questa il numero de' punti di contatto fra il pezzo conduttore e il pezzo condotto è molto maggiore che col pettine, onde la pressione esercitata su ciascun punto risulta molto minore.

e restano meglio assicurate la regolarità del movimento e la durata del congegno.

92. Quando il movimento rettilineo, che si vuol produrre, debb'essere molto celere, il passo della vite dovendo essere molto grande, il pane riuscirebbe di grossezza sproporzionata al diametro del cilindro, e la chiocciola per abbracciare molte spire dovrebbe farsi molto alta. Per ovviare a questi inconvenienti le viti si fanno allora a due o più pani paralleli; la *fig.* 21 *a*, per esempio, rappresenta una vite a due pani quadrati; l'uno *h*, *h'*, *h''* ha la sua origine in *i*, e il suo termine in *i'*, l'altro *k*, *k'*, *k''* ha l'origine e il termine nella parte invisibile del cilindro, cioè alle estremità dei diametri delle due basi condotti pei punti *i*, *i'*; il passo *hh'*, oppure *kk'*, è eguale, non più al doppio, bensì al quadruplo della larghezza di un pane. Il taglio di questa vite è rappresentato nella parte superiore della figura.

La *fig.* 21 *b* rappresenta una vite a tre pani triangolari, le cui origini sono simmetricamente distribuite sulla circonferenza della base a distanza di 120 gradi una dall'altra; in questa vite il passo *hh'* è triplo della larghezza del pane. Si vede pure nella figura lo spaccato di questa vite, il quale non differisce da quello della vite a un solo pane triangolare.

93. Acciocchè vi sia trasformazione del movimento circolare in movimento rettilineo, è necessario che girando la vite intorno al suo asse, la chiocciola non possa partecipare a questo movimento rotatorio, oppure al contrario bisogna che giri la chiocciola e la vite non giri. È chiaro infatti che, se vite e chiocciola girassero insieme, non vi sarebbe trasformazione alcuna di movimento, ma solo un comune moto di rotazione. Ora nella combinazione dei due pezzi ponno avvenire quattro casi differenti, di cui le quattro *figg.* 2, 3, 4 e 5 della *tav.* 8 rappresentano esempli facili ad intendersi. Il torchio della *fig.* 4 è quello che comunemente s'impiega in molte provincie per spremere le vinacce; le due viti verticali VV

sono libere di girare, ma non possono prendere moto progressivo essendo esse ritenute da due chiavarde di ferro, che passano attraverso al tavolone TT e sono assicurate dissotto con forti biette; le chiocciole poi sono scolpite nel cappello FF. Facendo girare le viti per mezzo di *stanghe* od *aspi*, che s'introducono negli *occhi* onde sono traforate le teste delle viti, il cappello FF si abbassa, e premendo sul coperchio GG, schiaccia e spreme le vinacce ammontate nel *truogolo* sottoposto HH. Qui dunque la vite ha moto rotatorio, la chiocciola moto progressivo.

Nella *fig.* 3 all'incontro la chiocciola F può girare liberamente, ma non può aver moto progressivo a cagione dei due tavoloni tra i quali si trova compresa; la vite V può alzarsi ed abbassarsi, ma non già girare, perchè è saldamente unita al coperchio GG intagliato in modo da abbracciare i due montanti del torchio che servono di guide al suo movimento. Qui dunque gira la chiocciola, e la vite si muove con moto rettilineo.

È facile lo scorgere come nella *fig.* 2 la chiocciola scolpita nel cappello FF è assolutamente immobile, e la vite ha insieme moto progressivo e rotatorio; mentre invece nella *fig.* 5 le viti VV non si muovono per niun modo, e le chiocciole CC' nello stesso tempo girano e si avanzano lungo le viti. Ciascuna di queste quattro disposizioni può avere, secondo le varie applicazioni, particolari vantaggi che la facciano anteporre alle altre.

94. Col soccorso di una sola vite e della sua chiocciola, se ne posson fare infinite altre d'ogni diametro e d'ogni passo, mercè del *tornio da invitare* rappresentato nella *fig.* 1, *tav.* 8. Esso non differisce essenzialmente dal congegno della *fig.* 17, *tav.* 7; solo il carretto D in luogo di essere tirato da un filo, fa corpo ed è sospinto insieme con la chiocciola mobile della vite VV; quando adunque si fa girar questa vite per mezzo del manubrio M, la sua chiocciola, l carretto e il bulino si

avanzano, e intanto il moto rotatorio si trasmette al cilindro da invitare per mezzo delle due ruote dentate $r$, R inalberate, quella sull'asse della vite, questa sull'asse del cilindro. Se queste due ruote saranno del medesimo diametro, il cilindro farà il suo giro nello stesso tempo che la vite VV, e il passo riuscirà eguale in entrambi; ma se la ruota R è più grande o più piccola che la $r$, la sua velocità angolare è più piccola o più grande, ed il passo risulta proporzionatamente maggiore o minore di quello della vite matrice VV.

Ne' tornii di uso più frequente, il pezzo o cilindro da invitare riceve il movimento direttamente dalla vite, essendo fermato sul prolungamento di essa; epperò esso partecipa così al moto progressivo, come al moto rotatorio della vite; il bulino invece rimane immobile fermato sull'*appoggiatoio* del tornio.

Le viti di piccol diametro si fanno in modo più spedito e più facile per mezzo di *madreviti* o *trafile da invitare*, che sono chiocciole del calibro e del passo voluti, scolpite entro una piastra d'acciaio temperato (*fig.* 6); facendo entrare con isforzo moderato una verga di metallo entro alla madrevite, col girare quella o questa, od entrambe, ma in parti contrarie, le spire della madrevite lasciano la loro impronta sulla verga, e la trasformano in vite. Una stessa piastra contiene ordinariamente molte chiocciole di diverso calibro e di diverso passo.

Più comoda e di miglior uso è la *madrevite a guancialetti* (*fig.* 17), nella quale ogni chiocciola è formata di due mezzelune o guancialetti incastrati in un telaio e premuti uno contro l'altro da una vite; questa disposizione permette di andar regolatamente accrescendo la pressione delle spire della madrevite sulla verga da invitare, e d'impiegare i medesimi guancialetti a far viti di diverso calibro, ma dello stesso passo.

Le chiocciole si fanno introducendo a forza con moto rotatorio un *maschio* d'acciaio a vite, entro al foro che si vuole invitare, e che debb'essere di diametro un po' minore di quello della vite ch'esso dee ricevere.

95. Gli usi della vite nelle arti sono pressochè infiniti; essa è parte essenziale di quasi tutte le macchine e stromenti destinati a produrre grandi pressioni, come torchi, strettoi, morse ecc.; essa serve a tenere insieme saldamente connesse le varie parti delle macchine e d'altre strutture, particolarmente di legnami, e prende allora i nomi di *chiavarda* o di *vite a capocchia*, secondo ch' essa ha una vera chiocciola, o pure si insinua con le sue spire nella sostanza medesima dei corpi che dee tenere uniti. Finalmente la vite ci somministra il mezzo più acconcio a produrre un moto lento, continuo, regolare, ed è quindi di uso frequentissimo in tutti gli strumenti scientifici, sia che occorra di ridurli in piano perfettamente orizzontale (*viti di livello*), sia che si debbano fare nella disposizione delle varie parti gli ultimi e più scrupolosi aggiustamenti (*viti di rettificazione*), sia finalmente che si abbiano da misurare con somma esattezza piccolissime distanze o dimensioni (*viti micrometriche*). La *vite di mira* dei cannoni, per esempio, è una vite di rettificazione.

Noi abbiamo veduto come una vite di poche spire (*tav.* 7, *fig.* 22) possa condurre un pettine di qualsivoglia lunghezza; ora se questo pettine, invece di essere rettilineo, sarà piegato secondo la circonferenza di un circolo e verrà così a trasformarsi in ruota dentata, il suo movimento potrà continuarsi perpetuamente o meglio indefinitamente, e si avrà quella particolar combinazione della vite (*tav.* 8, *fig.* 8), che è conosciuta dai meccanici sotto il nome di *vite perpetua*. Essa serve a trasformare un movimento circolare intorno un asse dato, in un movimento circolare intorno ad un altro asse che non incontra il primo, ed è contenuto in un piano ad esso perpendicolare. Il passo della vite debb'essere eguale manifestamente a quello della ruota, cioè allo spazio occupato sulla circonferenza da un dente e da un vano, cosicchè ad ogni giro compiuto della vite la ruota si avanzi di un dente solo; ond'è a concludere che la velocità angolare della vité sta a quella della ruota, come il numero dei denti di questa sta all'unità.

Ciò tuttavia debbe tenersi per vero soltanto quando la vite perpetua ha un solo pane; che se fosse a due pani (*fig.* 9), ciascun suo giro farebbe avanzare due denti della ruota, e le velocità angolari starebbero come il numero dei denti della ruota al numero due. Generalmente, qual che sia il numero dei pani della vite, la sua velocità angolare starà a quella della ruota, come il numero dei denti di questa sta al numero dei pani di quella.

Non è questo il luogo atto a ricercare quale forma convenga dare ai profili del pane della vite e del dente della ruota; ma è manifesto che questi denti debbono intagliarsi sulla grossezza della ruota con direzioni oblique all'asse della medesima, e tali che le spire della vite possano venire a contatto con essi per tutta la loro lunghezza. Questa inclinazione sarà dunque tanto maggiore, quanto maggiore è il passo della vite; e questo passo sarà tanto più grande, quanto più grande sarà il numero dei pani. Se noi fingeremo che tanti sieno i pani, quanti sono i denti della ruota (*fig.* 10), un po' di riflessione basterà a far comprendere che la ruota si troverà trasformata in una vite a molti pani perfettamente eguale a quella, che le trasmette il movimento.

96. Non mi tratterrò qui a descrivere altre applicazioni dell'elica ad usi meccanici, quali sono ad esempio i *cavatappi*, i *cavastracci*, le *molle a elica*, le *scale a chiocciola*, la *vite di Archimede* ecc.; esse sono o troppo semplici per aver bisogno di commento, o tali da non potersi bene esporre senza entrare in considerazioni estranee all' argomento dello studio presente e proprie della Meccanica.

Già si è notato in sul principio di questo capitolo (§ 86), che quando con un moto rotatorio intorno a un asse dato si vorrà produrre un movimento rettilineo secondo una direzione inclinata all'asse medesimo, la scanalatura che guida il dente della stanghetta dovrà scolpirsi sulla superficie curva non mica di un cilindro, ma sì di un tronco di cono retto circolare, sostituendo così al bocciuolo cilindrico un bocciuolo conico.

Se il moto della stanghetta debb'essere equabile quando è equabile la rotazione del cono, cioè se la ragione delle loro velocità dee rimanere costante, la curva del canaletto si descriverà così:

Sia $AabB$ (*tav.* 8, *fig.* 12) il tronco di cono dato; se ne sviluppi in piano la superficie convessa, descrivendo il settor circolare $VBD$ col centro nel vertice $V$ del cono intero, col raggio $VB$ eguale al lato di esso, e con la base $BHD$ eguale alla circonferenza della base del cono; da questo settore si recida il settor minore $bVd$, descritto con lo stesso centro e con raggio $Vb$ eguale al lato del cono mancante $Vab$. Si divida il lato $bB$ del tronco in tante parti eguali quante debbono essere le spire, e pei punti $M$, $N$ di divisione si descrivano gli archi di circoli concentrici $Mm$, $Nn$; finalmente pei medesimi punti si facciano passare gli archi $MD$, $Nm$, $bn$.... di spirali d'Archimede. Inviluppando il settore piano $VBD$ sulla superficie del cono, gli archi $MD$, $Nm$, $bn$ .... segneranno sopra di essa la curva domandata (1).

(1) Nell'elica cilindrica l'inclinazione della curva al lato della superficie è *costante*, ed il passo è pure *costante*, ma sulla superficie di un cono queste due condizioni sono inconciliabili; se l'inclinazione della curva sarà costante, il passo andrà stringendosi dalla base al vertice; se il passo si mantiene costante, l'inclinazione di necessità va crescendo. Io do qui il nome di *elica conica* alla curva di *passo costante* e d'inclinazione variabile.

Egli è appena necessario di dimostrare ciò che si asserisce nel testo; cioè che sviluppando in piano la superficie del cono, ciascuna spira dell'elica si cangierà in un arco di spirale d'Archimede; poichè la distanza della elica dal vertice del cono cresce proporzionalmente

Circondando al cono un pane di andamento elicoidale si costruirà una vite conica capace di trasmettere il moto ad un pettine, ma non già di muoversi entro a una chiocciola, poichè la forma conica della vite sarebbe di ostacolo a ciò che questa potesse avanzare entro ad una capacità di diametro invariabile. Le viti coniche sono tuttavia di uso prezioso quando si vuol penetrare con esse entro a sostanze cedevoli, che col comprimersi o col rompersi danno luogo innanzi al cono, e permettono così alla vite medesima di aprirsi da sè un passaggio e di scolpirsi essa medesima la propria chiocciola. Ciò spiega l'uso e i vantaggi dei succhielli, delle trivelle e delle viti coniche a capocchia, tanto impiegate e così utili per la connessione delle opere di legname.

all'ampiezza dell'angolo compreso tra due piani meridiani condotti pei due punti che si considerano, e quest'angolo è manifestamente proporzionale a quello che, nello sviluppo della superficie, fanno tra loro le due generatrici corrispondenti del cono, ossiano i due raggi del settore circolare, che passano per quei due punti della curva.

Siano $r$, $r'$ i raggi delle due basi del dato cono tronco, ed $h$ la sua altezza; sarà $l=\sqrt{h^2+(r'-r)^2}$ il suo lato, e se il numero delle spire è $n$, sarà $\frac{l}{n}$ il passo, ed $L=\frac{l\,r'}{r'-r}$ il lato intiero del cono prolungato fino al suo vertice.

La circonferenza della base maggiore essendo $2\pi r'$, l'arco di circolo di raggio L, che è sviluppo di questa circonferenza, avrà per *ampiezza*

$$\frac{2\pi r'}{L}=\frac{2\pi(r'-r)}{\sqrt{(r'-r)^2+h^2}}\ ;$$

ed il passo H della spirale d'Archimede, sviluppo dell'elica domandata, sarà

$$H=\frac{h^2+(r'-r)^2}{n(r'-r)}\ .$$

Se l'elica conica si proietta sul piano della base, questa proiezione sarà pure una spirale d'Archimede; poichè tutte le generatrici del cono, facendo il medesimo angolo col piano della base, le proiezioni delle distanze di tutti i punti dell'elica dal vertice del cono (ossiano i raggi

97. Curioso quanto utile studio è quello de' cangiamenti, che possono farsi nella forma e nella disposizione di un meccanismo senza cangiarne per nulla gli effetti, e ce ne hanno dato più d'un esempio le manovelle motrici e gli eccentrici circolari; nuovi esempi e non meno notabili ci saranno ora somministrati da' bocciuoli cilindrici e conici.

Sia ADBE (*tav.* 8, *fig.* 13) una piastra piana fermata obliquamente all'estremità dell'asse verticale OC, intorno al quale essa si faccia girare mercè il manubrio OP; la stanghetta MN parallela all'asse OC, appoggiandosi con la punta M sul piano obliquo AB, sarà alternativamente sospinta all'insù dall'azione della piastra, ed all'ingiù dal proprio peso, farà corse di lunghezza BH, e prenderà lo stesso movimento come

vettori di tutti i punti della proiezione dell'elica dal centro della base) saranno proporzionali a quelle distanze medesime. Il *passo* di questa spirale sarà manifestamente $\frac{r'-r}{n}$ : epperò detto $\zeta$ il suo raggio vettore, la sua equazione polare sarà

$$\zeta = \frac{r'-r}{n} \cdot \frac{\varphi}{2\pi};$$

e la distanza $z$ del punto corrispondente dell'elica da un piano condotto pel vertice del cono, parallelamente alla base di esso, sarà

$$z = \frac{h\varphi}{2\pi n};$$

cosicchè, in coordinate rettangole, le equazioni dell'elica saranno

$$\text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) = \frac{2\pi n}{r'-r}\sqrt{x^2+y^2};$$

$$z = \frac{h}{r'-r}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Della curva descritta sopra un cono circolare e retto, con inclinazione costante al lato del cono (curva alla quale, meglio che a quella ora descritta, spetta il nome di elica conica), troveremo altra migliore opportunità di parlare.

se fosse condotta da una scanalatura scolpita nella superficie di un cilindro circolare di raggio CE (eguale alla distanza della stanghetta dall'asse del movimento), secondo l'andamento della ellisse, comune intersezione di questo cilindro col piano ABDE. Si può pur dimostrare che la legge del movimento alternativo della stanghetta sarà quella stessa che avrebbe luogo col meccanismo della *tav.* 7, *fig.* 1, facendo in questo il braccio della manovella CD eguale alla metà della corsa BH (*tav.* 8, *fig.* 13) (1).

Se invece di una piastra piana si adattasse in cima all'asse OC un corpo terminato da una superficie curva qualunque, per esempio un cono disposto eccentricamente, come nella *tav.* 8, *fig.* 14, la legge del moto della stanghetta MN parallela all'asse OC del movimento sarebbe differente, e in ogni caso il meccanismo così costrutto equivarrebbe ad un bocciuolo cilindrico come quello della *tav.* 7, *fig.* 11, in cui il canaletto *abcd* seguisse l'andamento della curva descritta dalla punta della stanghetta sulla superficie curva che le comunica il movimento, ossia della curva intersezione della superficie data, con quella del cilindro circolare descritto intorno all'asse del moto OC, con raggio eguale alla distanza della stanghetta dall'asse.

Anche i bocciuoli conici si possono modificare in modo analogo; così, per esempio, se il cono AVB della figura ora citata sospingerà la stanghetta M'N', inclinata all'asse di ro-

(1) Infatti, ponendo l'origine del movimento nella posizione più bassa della stanghetta (cioè quando la sua punta tocca la lastra mobile in A) nel passare nella posizione qualunque MN, essa si sarà sollevata della quantità $QN = AQ \tan BAH$; designando poi con la lettera $\varphi$ l'angolo descritto dalla lastra mobile intorno all'asse OC, tra le due posizioni che si considerano, ed osservando che è invariabile la distanza della stanghetta dall'asse OC, vedremo essere $AQ = CE\,(1 - \cos\varphi)$, e $QN = CE \tan BAH\,(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}\,BH\,(1 - \cos\varphi)$ formola identica alla (2''') della nota al § 75.

tazione OC, questa ne riceverà un moto alternativo, e la sua punta M segnerà sulla superficie del cono AVB una curva MM', che sarà quella secondo cui essa superficie sarebbe incontrata dalla superficie di un secondo cono N'QN'' retto e circolare, generato dalla rotazione della stanghetta MN intorno all'asse CO del movimento. Dal che si conchiuderà, che il moto della stanghetta sarà il medesimo, come se in M essa avesse un dente impegnato in un canaletto scolpito nel cono circolare N'QN'', secondo l'andamento della curva MM'. Ma ci basti l'aver così indicato alla diligenza de' nostri lettori un argomento degno di esercitare la loro sagacità.

# CAPITOLO QUATTORDICESIMO

## DEL CONTATTO DI SVILUPPO E DELL' USO DI ESSO PER LA TRASMISSIONE EQUABILE DEL MOVIMENTO TRA ASSI PARALLELI.

98. Quando due pezzi CME, DMF (*tav.* 9, *fig.* 12), mobili intorno ai centri A, B, si toccano in un punto M collocato fuori della linea AB dei centri, il moto non può trasmettersi dal primo al secondo pezzo per semplice contatto di sviluppo, ma vi ha necessariamente strisciamento di un pezzo contro l'altro. Infatti se fossevi semplice contatto di sviluppo, passando i due pezzi in una posizione infinitamente vicina alla prima, verrebbero a toccarsi ne' punti $m$, $m'$ infinitamente vicini al punto M, ed egualmente distanti da esso (§ 49) in modo che le due normali $mn$, $m'n'$ erette ne' due punti $m$, $m'$ si troverebbero nel prolungamento una dell'altra. Dopo questo movimento dei due pezzi AM, BM, la loro posizione relativa sarebbe la medesima, come se, restando immobile il pezzo BM, l'altro AM si fosse fatto rotare senza scorrimento sulla curva DMF, fintantochè il punto $m'$ coincidesse con $m$. Ma in questa rotazione il punto A descriverebbe evidentemente un arco piccolissimo di circolo A$a$ perpendicolare alla retta AM: ora dovendo rimanere invariabile la distanza AB dei centri dei due pezzi, un tal movimento è impossibile, salvo che l'archetto A$a$ non possa considerarsi come descritto dal centro B, cioè come perpendicolare alla retta AB; epperò le rette AM, AB passando entrambe pel punto A, e dovendo entrambe essere perpendicolari ad A$a$, debbono coincidere, ed il punto M della prima dee cadere in qualche punto della seconda,

come si vede nella *fig.* 13 (1). Acciò adunque la trasmissione del moto possa farsi indefinitamente per semplice sviluppo, è necessario che i due pezzi in tutte le successive posizioni sempre si tocchino in un punto della retta, che passa pei centri intorno ai quali essi si muovono.

Si vedrà in un altro capitolo in qual modo, per mezzo di questa condizione, si determinino le curve tra le quali il moto può indefinitamente trasmettersi per contatto di sviluppo; intanto è chiaro, come già abbiamo altre volte accennato (§ 44), che in virtù dello scambievole attrito il movimento può trasmettersi per isviluppo tra due ruote circolari le cui circonferenze si tocchino, poichè il contatto tra due circoli ha sempre luogo in un punto della linea dei centri. Vedremo pure fra poco, che la trasmissione del moto si fa in questo caso equabilmente; e questa proprietà delle ruote, insieme con la semplicità della loro costruzione, facendo che esse siano frequentissimamente impiegate nelle arti, noi esporremo qui diffusamente quanto importa di sapere intorno al modo di computarne gli effetti, e tanto più volentieri, che questo studio ci agevolerà poi di molto la esposizione delle proprietà delle ruote dentate.

99. Siano TM, T*m* (*tav.* 2, *fig.* 10) le due ruote, A, B i loro centri, T il loro punto di contatto; girando la prima pel verso TM, la seconda sarà trascinata dall' attrito pel verso T*m*, senza che vi sia nissuno strisciamento di una circonferenza sull'altra; segue da ciò, che se i punti M, *m* delle due circonferenze sono quelli che in un certo istante si trovavano sulla linea dei centri e si toccavano in T, saranno eguali tra loro le lunghezze dei due archi TM, T*m* che si sono svilup-

(1) Nella prima edizione di questi Principii di Cinematica io avea data del presente teorema una dimostrazione assai meno semplice, tolta dall'opera del signor Willis, dalla quale ho tratto tante altre cose. La dimostrazione, che ora sostituisco alla prima, mi sembra non meno rigorosa ed assai più evidente di quella.

pati l'uno sull'altro mentre i punti M, *m* sono venuti l'uno di T in M, l'altro di T in *m*. Ora queste due lunghezze eguali TM, T*m* non essendo altro che gli spazi percorsi nello stesso tempo dai punti M, *m*, o dalle circonferenze delle due ruote, ne segue che le velocità assolute di queste due circonferenze sono eguali tra loro, epperò, se le due ruote fossero eguali, esse compirebbero il loro giro nello stesso tempo. Ma se una delle ruote è maggiore dell'altra, camminando le due circonferenze con la stessa velocità assoluta, quella che è più lunga impiegherà un tempo maggiore a fare il suo giro, e le durate delle rivoluzioni delle due ruote saranno direttamente proporzionali alle loro circonferenze, o quel che torna allo stesso, saranno proporzionali ai loro diametri o ai loro raggi, poichè questi son proporzionali alle circonferenze. Finalmente è manifesto, che il dire che una ruota impiega due, tre, quattro volte più tempo che l'altra a fare un giro, è quanto dire che la seconda fa due, tre, quattro giri, mentre la prima fa un giro solo; ossia che i numeri dei giri fatti dalle due ruote nello stesso tempo sono inversamente proporzionali alle durate delle loro rivoluzioni. Da tutto ciò possiamo conchiudere, che quando due ruote si menano per semplice attrito:

1° Le velocità assolute delle due circonferenze sono eguali, e per conseguenza, se il movimento della prima è equabile, sarà equabile anche il movimento della seconda.

2° Le durate delle rivoluzioni delle due ruote sono direttamente proporzionali alle loro circonferenze od ai loro raggi.

3° I numeri dei giri fatti nello stesso tempo, ossiano le velocità angolari delle due ruote, sono inversamente proporzionali alle loro circonferenze od ai loro raggi.

Quindi è che la ruota maggiore, la quale fa meno giri in un dato tempo, o impiega più tempo a far un giro, si suol chiamare la *ruota lenta*, mentre la ruota minore che fa più giri in un tempo dato, o impiega meno tempo a compiere un giro, si chiama la *ruota celere.*

Se più ruote A, B, C, D si trasmettono successivamente il movimento (*tav.* 8, *fig.* 15), in modo che ciascuna delle ruote intermedie tocchi quella che la precede e quella che la segue, le velocità assolute di tutte le circonferenze sono eguali, le durate delle loro rivoluzioni sono proporzionali direttamente ai loro raggi, e le loro velocità angolari, cioè i numeri dei giri fatti nello stesso tempo, sono inversamente proporzionali ai raggi medesimi, onde ciascuna ruota si muove precisamente come se essa fosse in contatto immediato con la prima ruota A; quindi è che si possono mutare a piacimento i raggi ed il numero delle ruote intermedie, sostituendo per esempio le cinque ruote A′, B′, C′, D′, E′ della *fig.* 16 alle quattro A, B, C, D della *fig.* 15 senza che riesca alterata la ragione delle velocità angolari delle due ruote estreme A, D, purchè non si muti per nulla la ragione de' raggi di queste due ruote. Così se la ruota D avrà raggio doppio della A, questa farà sempre due giri mentre quella ne fa un solo, qualunque sia il numero e la grandezza delle ruote intermedie, le quali per questa ragione si chiamano *ruote oziose.* Esse non sono inutili tuttavia, e vengono sovente impiegate, sia perchè le ruote estreme A, D hanno i loro assi troppo lontani perchè i raggi possano farsi tanto grandi da mettere le loro circonferenze in contatto immediato, sia perchè le ruote intermedie somministrano il mezzo di comunicare un movimento conveniente ad altre parti del meccanismo.

100. La combinazione più utile, e perciò anche più frequente delle ruote non è però quella che abbiamo ora descritta, ma bensì quella che è rappresentata nella *fig.* 17, nella quale si vede che la prima ruota A muove per contatto la seconda *b*, e questa comunica il moto alla B, non per mezzo dell'attrito delle loro circonferenze, ma perchè entrambe sono fermate sul medesimo asse, cosicchè l'una non può girare senza

tirarsi dietro anche l'altra; due ruote siffatte diconsi perciò *solidarie* tra di loro, e fanno necessariamente lo stesso numero di giri nello stesso tempo. La ruota B poi comunica il moto per contatto alla *c*, e questa si tira dietro la C solidaria con essa, epperò anche le *c*, C hanno la medesima velocità angolare, cioè fanno un pari numero di giri nello stesso tempo; finalmente la C mena la *d* per immediato contatto.

Supponiamo, per fissar le idee che le ruote A, B, C che chiameremo le *ruote conduttrici* abbiano i loro raggi eguali a 40, a 20 e a 30 centimetri rispettivamente, e che le ruote *b, c, d,* ossia le *ruote condotte* abbiano i raggi di 8, di 10 e di 3 centimetri: secondo la regola cui siamo giunti poco fa,

Mentre A fa un giro solo, *b* ne fa cinque;
Mentre B fa un giro solo, *c* ne fa due;
Mentre C fa un giro solo, *d* ne fa dieci;

e poichè B fa lo stesso numero di giri che *b*, e C fa lo stesso numero di giri che *c*, è facile di vedere che

Mentre A fa un giro, *b* ne fa cinque;
Mentre B fa cinque giri, *c* ne fa dieci;
Mentre C fa dieci giri, *d* ne fa cento,

e per conseguenza, che

Mentre A fa un giro solo, *d* ne fa cento.

Nello stesso modo si potrà sempre trovare quanti giri fa l'ultima ruota di un *rotismo* comunque complicato, mentre la prima ruota fa un giro solo; ossia la *ragione* delle velocità angolari della prima e dell'ultima ruota. Ma questa ragione si può trovare in un colpo mercè la regola seguente, di cui si comprenderà facilmente la giustezza:

*La velocità angolare della prima ruota conduttrice sta alla velocità angolare dell'ultima ruota condotta, come il prodotto dei raggi di tutte le ruote condotte sta al prodotto dei raggi di tutte le ruote conduttrici.*

O in altre parole equivalenti :

*Per sapere quanti giri fa l'ultima ruota condotta mentre la prima ruota conduttrice fa un giro solo, si divida il prodotto dei raggi di tutte le ruote conduttrici, pel prodotto dei raggi di tutte le ruote condotte, e il quoziente sarà il numero cercato* (1).

Così nell'esempio precedente i raggi delle ruote conduttrici essendo 40, 20 e 30, il prodotto di questi raggi è 24000, e i raggi delle ruote condotte essendo 8, 10 e 3, il prodotto di questi è 240; ora dividendo 24000 per 240, si trova per quoziente 100, che è appunto il numero di giri che fa l'ultima ruota condotta *d*, mentre la prima ruota conduttrice A fa un giro solo.

Da ciò si comprende che la ragione delle velocità angolari delle due ruote estreme non cambierebbe per nulla, scambiando in qualunque maniera le ruote conduttrici tra loro, e le ruote condotte tra loro; così l'ultima ruota condotta

(1) I lettori, che hanno le più elementari nozioni di algebra, si renderanno conto nel modo seguente della verità della regola.

Siano $R$, $R'$, $R''$ i raggi delle ruote conduttrici
$r$, $r'$, $r''$ quelli delle ruote condotte
$n$ il numero dei giri della ruota $R$
$n'$ — delle ruote $r$, $R'$
$n''$ — delle ruote $r'$, $R''$
$n'''$ — della ruota $r''$

sarà $$\frac{R}{r}=\frac{n'}{n},\quad \frac{R'}{r'}=\frac{n''}{n'},\quad \frac{R''}{r''}=\frac{n'''}{n''},$$

e per conseguenza $$\frac{R\,.\,R'\,.\,R''}{r\,.\,r'\,.\,r''}=\frac{n'\,.\,n''\,.\,n'''}{n\,.\,n'\,.\,n''}=\frac{n'''}{n}.$$

farebbe sempre cento giri mentre la prima ruota conduttrice ne fa un solo, quando invece di collocare le ruote conduttrici nell'ordine 40, 20, 30, si collocassero in quest'altro ordine 30, 40, 20, oppure 20, 30, 40; e le ruote condotte invece di seguirsi nell'ordine 8, 10, 3, si seguissero in quest'altro ordine 3, 10, 8, oppure 10, 8, 3: infatti con una qualunque di queste disposizioni il prodotto dei raggi delle ruote conduttrici sarebbe sempre 24000 e il prodotto dei raggi delle ruote condotte 240.

101. Fin qui abbiamo supposto che si conoscessero i raggi di tutte le ruote, e si volesse trovare la ragione dei numeri dei giri, o delle velocità angolari delle due ruote estreme; supponiamo ora, al contrario, che si conosca la ragione delle velocità angolari delle ruote estreme, e si vogliano trovare quali debbano essere i raggi di tutte le ruote. Cominciamo dal caso più semplice.

Siano A e B (*tav.* 2, *fig.* 10) i centri di due ruote di cui si vogliano determinare i raggi di maniera che, mentre la prima fa un certo numero di giri, la seconda ne faccia un altro numero dato; è chiaro che bisognerà:

1° Che la somma dei due raggi sia eguale alla distanza AB dei due centri.

2° Che i due raggi sieno inversamente proporzionali ai dati numeri di giri, e per conseguenza che bisognerà dividere la retta AB in due parti AT, BT, che stieno tra loro come il numero dei giri della ruota B sta al numero dei giri della ruota A; la qual cosa si farà così:

Pel punto A si condurrà una retta indefinita AZ che faccia con AB un angolo qualunque; poi su questa retta si porteranno successivamente le due lunghezze A*t*, *tb* proporzionali ai numeri dei giri delle ruote B, A; si tirerà la retta *b*B, e pel punto *t* conducendo *t*T parallela a *b*B, essa taglierà la AB in T in modo che AT, BT saranno inversamente proporzionali ai numeri dei giri delle ruote A, B, e per conseguenza descrivendo i circoli TM$a$, T$mb$ coi raggi AT, BT, saranno questi le due ruote domandate.

A questa conchiusione noi saremmo giunti di un balzo, se avessimo applicato al caso presente la proposizione seconda del § 54 relativa ai cingoli, la quale ha luogo qui, poichè l'attrito fra le due ruote fa appunto l'uffizio di un cingolo.

Quando invece di due ruote sole si vorranno impiegare più ruote conduttrici e più ruote condotte, disposte come nella *tav.* 8, *fig.* 17, si osserverà:

1° Che la somma dei raggi di tutte quante le ruote debb'essere eguale alla distanza A$d$ dei centri della prima e dell'ultima ruota.

2° Che il prodotto dei raggi di tutte le ruote conduttrici debbe stare al prodotto dei raggi di tutte le ruote condotte, come il numero dei giri fatti dall'ultima ruota condotta, sta al numero dei giri fatti dalla prima ruota conduttrice.

E si comprenderà facilmente che la quistione si risolverà mediante la regola seguente, la quale suppone che vi debbano essere tre coppie di ruote, come nella citata figura.

1° Si prendano due numeri qualunque P e Q che stiano tra di loro come i numeri dei giri della prima ruota conduttrice e dell'ultima ruota condotta.

2° Si cerchino tre numeri $p$, $p'$, $p''$ che moltiplicati insieme dieno un prodotto eguale a P, e tre numeri $q$, $q'$, $q''$ che moltiplicati insieme dieno un prodotto eguale a Q, od in altre parole, si scomponga il numero P in tre fattori $p$, $p'$, $p''$, ed il numero Q in tre fattori $q$, $q'$, $q''$.

3° Si faccia la somma dei sei numeri $p, p', p'', q, q', q''$, la quale somma chiameremo S; i raggi delle due prime ruote si troveranno per mezzo delle due proporzioni seguenti:

La somma S : numero $p$ : : la distanza A$d$ : raggio della prima ruota conduttrice.

La somma S : numero $q$ : : la distanza A$d$ : raggio della prima ruota condotta.

Mettendo poi successivamente nella prima proporzione i numeri $p'$ e $p''$ in luogo del numero $p$, l'ultimo termine di essa darà i raggi della seconda e della terza ruota conduttrice; e così mettendo successivamente nella seconda proporzione i numeri $q'$ e $q''$ in luogo di $q$, si troveranno i raggi della seconda e della terza ruota condotta.

La stessa regola sarà buona, qualunque sia il numero delle ruote che si vogliono impiegare, purchè in ciascun caso i numeri P e Q si compongano in tanti fattori quante sono le coppie delle ruote, cioè quante sono le ruote conduttrici o le ruote condotte.

Supponiamo per esempio, che le coppie di ruote debbano essere tre; e che l'ultima ruota condotta debba fare 100 giri, mentre la prima ruota conduttrice farà un giro solo. I numeri P e Q saranno qui 100 ed 1; il primo potrà scomporsi nei tre fattori 5, 5 e 4, il secondo nei tre fattori 1, 1 ed 1. La somma S sarà dunque 17, e se la distanza dei due assi o centri delle ruote estreme debb'essere di metri 1, 110, le proporzioni che abbiamo insegnato a formare daranno per le tre ruote conduttrici i raggi di metri 0, 3264, 0, 3264 e 0, 2611 e per le tre ruote condotte tre raggi eguali di metri 0, 0653 circa. Ma invece dei numeri 100 e 1 si possono prendere per P e per Q due altri numeri qualunque, purchè stiano nella medesima ragione, per esempio, 24000 e 240, e scomponendo il primo nei tre fattori 40, 20 e 30, ed il secondo nei tre fattori 8, 10 e 3; e supponendo sempre che la distanza degli assi delle ruote estreme debba essere di metri 1, 110, si troverebbero allora per le sei ruote i raggi $0^m, 40$; $0^m, 20$; $0^m, 30$; $0^m, 08$; $0^m, 10$; $0^m, 03$ che avevamo assunti in un precedente esempio.

102. La regola ora esposta dimostra che, dato il numero delle ruote e la ragione delle velocità angolari estreme, si possono formare infiniti rotismi differenti capaci di adempiere tutte le condizioni della quistione. Infatti pei numeri P, Q

si possono prendere numeri qualunque, purchè stiano nella ragione delle velocità angolari date, per esempio 100 e 1; 200 e 2; 600 e 6; 1200 e 12; 24000 e 240 ecc. Poi, fra queste coppie di numeri, scegliendone una a piacimento, i numeri così assunti si possono scomporre in fattori di molte maniere differenti; così per esempio il numero 24000 si può scomporre ne' varii modi che seguono:

| | | |
|---|---|---|
| 40 . . . . . | 20 . . . . . | 30 |
| 40 . . . . . | 40 . . . . . | 15 |
| 40 . . . . . | 25 . . . . . | 24 |
| 60 . . . . . | 20 . . . . . | 20 |
| 32 . . . . . | 30 . . . . . | 25 |
| ecc. | ecc. | ecc. |

ed il numero 240 si può anch'esso scomporre in più maniere, come per esempio in

| | | |
|---|---|---|
| 4 . . . . . | 6 . . . . . | 10 |
| 4 . . . . . | 4 . . . . . | 15 |
| 8 . . . . . | 6 . . . . . | 5 |
| 8 . . . . . | 10 . . . . . | 3 |
| 12 . . . . . | 10 . . . . . | 2 |
| ecc. | ecc. | ecc. |

e combinando una qualunque delle maniere di scomporre il primo numero, con una qualunque delle maniere di scomporre il secondo, se ne ricaverà una determinazione de' raggi delle sei ruote, capace di accrescere la velocità angolare della prima ruota nella ragione di uno a cento.

103. Se si volesse che le tre ruote conduttrici fossero eguali tra loro, e che le tre ruote condotte fossero pure eguali tra loro, il modo più semplice di procedere sarebbe di estrarre rigorosamente, o per approssimazione, la radice cubica del numero che esprime la ragione delle velocità angolari estreme,

e questa radice sarebbe allora la ragione dei raggi di una qualunque delle ruote conduttrici e di una qualunque delle ruote condotte. Nell'esempio precedente la ragione delle velocità angolari estreme dovendo essere 100, si avrebbe ad estrarre la radice cubica del numero 100, e si troverebbe che essa è prossimamente 4, 6416; nell'applicare la regola generale, i tre numeri $p$, $p'$, $p''$ si farebbero tutti e tre eguali a 4, 6416: ed i tre numeri $q$, $q'$, $q''$ si farebbero eguali ad uno, onde la somma che abbiamo chiamata S sarebbe 16, 9248; e supponendo ancora che la distanza dei centri delle due ruote estreme dovesse essere di metri 1, 11, il raggio comune delle ruote conduttrici si troverebbe con la seguente proporzione:

$$16,9248 : 1^{m},110 :: 4,6416 : \text{raggio cercato};$$

e questo riuscirebbe per conseguenza di metri 0, 3044. E similmente il raggio comune di tutte le ruote condotte si avrebbe da quest'altra proporzione:

$$16,9248 : 1^{m},110 :: 1 : \text{raggio cercato},$$

il quale sarebbe così di metri 0, 0656.

Non è mestieri osservare, che se il numero delle coppie di ruote, che si vogliono impiegare, fosse di quattro, cinque o sei, dovrebbe estrarsi la radice quarta, quinta o sesta, invece della radice cubica del numero che esprime la ragione delle velocità angolari delle ruote estreme.

# CAPITOLO QUINDICESIMO

## DELLA COMUNICAZIONE EQUABILE DEL MOVIMENTO PER ISVILUPPO TRA ASSI NON PARALLELI.

104. Gli assi delle due ruote, che si conducono per contatto di sviluppo, si sono da noi nel precedente capitolo supposti paralleli; ma essi potranno talora essere divergenti, oppur anche non contenuti nel medesimo piano, ed allora le ruote piane, che adempivano ogni bisogno nel caso del parallelismo degli assi, diverranno insufficienti od inette. Supponiamo infatti che due ruote infinitamente sottili, DBE, ECF (*tav.* 8, *fig.* 20), sieno fermate sugli assi BA, CA concorrenti in A, e che le loro circonferenze si tocchino in E. Teoricamente parlando, queste due ruote infinitamente sottili si comunicheranno ancora il movimento per isviluppo, quantunque non sieno nel medesimo piano, e la ragione delle loro velocità angolari sarà ancora la medesima come se gli assi fossero paralleli; ma due ruote non ponno praticamente farsi di spessezza infinitamente piccola, e se vorremo ingrossarle quanto basti a dar loro la necessaria solidità, converrà che prendano la forma di due coni tronchi DE*ed*, EF*fe*, col vertice comune in A, per la ragione che fra poco esporremo.

Che se gli assi non fossero nel medesimo piano, i centri delle ruote potrebbero fermarsi sopra questi assi nei punti, dov'essi sono incontrati dalla comune perpendicolare, la quale sarebbe allora la linea dei centri; le circonferenze si toccherebbero in un punto di questa linea, ma non avrebbero tuttavia una comune tangente, poichè le due ruote non essendo nello stesso piano, le tangenti condotte nel punto di contatto sarebbero bensì entrambe perpendicolari alla linea de'centri, ma situate ne' piani rispettivi delle due ruote, epperò si taglierebbero facendo un angolo eguale a quello de' piani medesimi. Quindi è, che se quest'angolo fosse retto, una delle ruote girando soffregherebbe e quasi segherebbe la circonferenza dell'altra, ma non comunicherebbe ad essa verun movimento; e se l'angolo de' due piani fosse acuto, il movimento in parte sarebbe trasmesso, in parte si consumerebbe in pregiudizievoli attriti. Di più, le ruote dovendo avere di necessità una certa grossezza e non potendo farsi cilindriche, sempre rimarrebbe da determinare la figura conveniente per le loro superficie; onde insomma si vede essere necessario qui uno studio, del quale ci proponiamo di esporre in questo capitolo i punti essenziali nel modo più elementare che ci sarà possibile.

105. Sia CBC′ (*tav.* 8, *fig.* 18) un cono retto girevole intorno all'asse AB, ed R*r* una ruota piana col suo asse D*d* parallelo al lato CB del cono; il moto si trasmetterà per isviluppo dal cono alla ruota, e le loro velocità angolari staranno tra loro nella ragione inversa del diamètro R*r* della ruota, al diametro CC′ della sezione del cono con cui essa è in contatto; così che la velocità angolare della ruota sarà maggiore di quella del cono, se il diametro CC′ è maggiore del diametro R*r*. Cangiando ora la posizione della ruota col portarla in R′*r*′, si cangerà pure la ragione delle velocità angolari, e quella della ruota diverrà tanto più piccola di prima, quanto il diametro *r*′*i*′ della nuova sezione del cono con cui essa è in contatto sarà minore del diametro della sezione CC′; si potrà dunque così trovare una posizione, in cui non solamente la velocità della ruota sia minore di quella del cono, ma sia piccola quanto si vorrà, col solo accostare il suo punto di contatto al vertice del cono. Che se esso si trasportasse in questo vertice medesimo, si cesserebbe ogni trasmissione di moto, e la velocità della ruota sarebbe assolutamente nulla. Da ciò si comprende che se invece di una ruota sola si met-

tessero in contatto col cono due, tre o più ruote eguali $Rr$, $R'r'$, $R''r''$ ecc., nel girar del cono esse riceverebbero tutte velocità angolari differenti, cioè farebbero tutte il loro giro in tempi differenti. Non mi arresto qui ad indicare le ingegnose applicazioni che si sono fatte e che si posson fare di queste osservazioni, con la speranza di trovare quandochesia per questa esposizione una migliore opportunità; ma continuando il mio ragionamento, dico ch'esso sarebbe ancor vero se l'asse delle ruote, invece di essere parallelo al lato del cono, facesse con esso un angolo qualunque. Se però quest'angolo fosse tale che il prolungamento dell'asse comune di tutte le ruote passasse pel vertice B del cono (*fig.* 19), cosicchè i diametri $r''R''$, $r'R'$, $rR$, delle ruote andassero crescendo proporzionalmente alle loro distanze $Br''$, $Br'$, $Br$ dal vertice, allora tutte le ruote avrebbero la medesima velocità angolare, cioè farebbero il loro giro nello stesso tempo; infatti allora $Rr$ starebbe a $CC'$, come $R'r'$ sta ad $r'i'$, come $R''r''$ sta ad $r''i''$ ecc.; epperò le velocità angolari di tutte le ruote avendo la medesima ragione a quella del cono, sarebbero tutte eguali tra loro. Da ciò si conchiude ancora, che se le ruote eguali della *fig.* 18 fossero tutte fermate sul medesimo asse $Dd''$, in modo da formare un corpo solo, e come una sola ruota cilindrica di spessezza $rr''$, una tale ruota non potrebbe essere condotta dal cono senza strisciamento, poichè i diversi suoi punti tenderebbero a girare con velocità angolari differenti; e lo stesso ancora avverrebbe se le ruote comunque diseguali tra di loro non avessero i loro raggi proporzionali a quelli delle sezioni del cono, con cui sono rispettivamente in contatto. Ma se si operasse in egual modo con le ruote uniformemente decrescenti della *fig.* 19, fermandole pur tutte sul loro asse comune, e componendone come una sola ruota conica di qualunque spessezza, avente il vertice comune col cono $CBC'$, sarebbe essa condotta da questo cono senza strisciamento di sorta, poichè riceverebbe in tutti i suoi punti la medesima velocità angolare.

In altre parole:

Due coni tangenti DAE, EAF (*fig.* 20), oppure due tronchi di cono D*de*E, E*ef*F si conducono l'un l'altro per semplice sviluppo, purchè i loro vertici concorrano nel medesimo punto; e le velocità angolari dei due coni, o dei due tronchi di cono, stanno fra loro in ragione inversa dei raggi BE, CE delle loro basi, o più generalmente diametri *de*, *ef* di dne sezioni parallele alle basi, e fatte per lo stesso punto *e* del lato AE, secondo cui i due coni si toccano.

106. Quando adunque un moto rotatorio equabile intorno all'asse BA si vorrà trasformare in moto rotatorio equabile intorno all'asse CA, basterà perciò costruire due ruote coniche D*de*E, E*ef*F, i cui raggi stien tra di loro in ragione inversa delle velocità angolari delle due rotazioni; la qual cosa si farà nel modo seguente.

Si segnino due rette AB, AC (*fig.* 21), le quali facciano l'angolo BAC eguale all'angolo dato dei due assi, e su queste rette partendo dal punto d'incontro A, si portino le lunghezze AG, AI direttamente proporzionali alle velocità angolari delle due ruote che debbono girare su questi due assi; si compia il parallelogramma AGLI e si conduca la diagonale AL; gli angoli BAL, CAL saranno gli angoli al vertice dei due coni domandati, cioè facendo girare la diagonale AL prolungata, prima intorno all'asse AB, poi intorno all'asse AC, essa genererà così le superficie di due coni capaci di condursi con la data ragione di velocità angolari. Infatti, dal punto L si abbassino sugli assi AB, AC le perpendicolari LM, LN; i due triangoli rettangoli GLM, ILN saranno simili, poichè i due angoli in G ed in I, essendo entrambi eguali all'angolo BAC dei due assi, saranno eguali tra di loro. Si avrà dunque la proporzione:

$$LM : LN :: GL : LI,$$

oppure $$LM : LN :: AI : AG;$$

i due raggi LM, LN delle basi dei due coni staranno dunque tra loro in ragione inversa delle velocità angolari delle due ruote, come debb'essere. Se ora da due punti qualunque E, *e* della retta AL si abbasseranno le perpendicolari EO, *eo* sull'asse AB, EP, *ep* sull'asse AC, i due trapezi EO*oe*, EP*pe*, girando intorno agli assi AB, AC, genereranno due ruote coniche capaci di trasmettersi il movimento con la data ragione di velocità angolari. Similmente i due trapezi più grandi MLB, NLC, con la loro rotazione intorno agli assi AB, AC, genererebbero due altre ruote più grandi delle prime, ma pur capaci del pari di trasmettersi il movimento con la medesima ragione di velocità; e potranno così formarsi una infinità di coppie di ruote differenti tra di loro, ma tutte egualmente atte alla proposta trasmissione del movimento tra i due assi dati AB, AC.

Due assi BB′, CC′ chè si tagliano in A (*fig.* 22) fanno intorno a questo punto quattro angoli, due a due eguali tra di loro, cioè due angoli acuti BAC, B′A′C′, e due angoli ottusi B′AC, BAC′. Per angolo dei due assi nella costruzione precedente può prendersi ad arbitrio uno degli angoli acuti come BAC, oppure uno degli angoli ottusi come B′AC. Nella prima ipotesi le ruote atte a trasmettere il movimento dall'uno all'altro asse saranno quelle generate dalla rotazione dei due trapezii O*oe*E, P*pe*E intorno ad AB, AC rispettivamente; nella seconda ipotesi saranno quelle generate dai due trapezii O′*o*′*e*′E′, P′*p*′*e*′E′ intorno ad AB′, AC. Tanto la prima coppia di ruote, quanto la seconda saranno atte a trasmettere il moto con la voluta ragione di velocità angolari, e potrà scegliersi tra le due quella che parrà più conveniente per altri rispetti. Esse differiranno però in ciò, che le rotazioni da esse communicate intorno all'asse CC′ si faranno per due versi l'uno all'altro contrarii.

Quando per angolo dei due assi si sceglie un angolo ottuso, può avvenire che la data ragione delle velocità angolari sia tale, che l'angolo al vertice di uno dei due coni riesca eguale ad un angolo retto; allora il cono si muta in un piano e la ruota corrispondente in un semplice disco circolare, onde viene ad aversi la disposizione rappresentata nella *fig.* 23. Può anche avvenire, se le velocità delle due ruote debbano essere molto differenti tra loro, che l'angolo al vertice di uno dei due coni risulti maggiore di un angolo retto, ed allora il cono minore, invece di rotolare sulla superficie esterna dell'altro cono, sarà contenuto nell'interno di esso come si vede rappresentato nella *fig.* 24. Quest'ultima disposizione presenta alcune difficoltà di esecuzione, per cui viene raramente impiegata; dell'altra, cioè di quella della *fig.* 23, avremo occasione più tardi di indicare qualche applicazione (1).

(1) La costruzione che qui s'insegna riducesi a formole, osservando che, per avere i triangoli ALM, BLN comune la ipotenusa AL, si ha

$$\mathrm{LM} : \mathrm{LN} :: \sin \mathrm{LAM} : \sin \mathrm{LAN}$$

e che per conseguenza l'angolo BAC dei due assi trovasi diviso dalla retta AL in due angoli BAL, CAL, i cui seni stanno tra di loro in ragione reciproca delle velocità angolari delle due ruote. Debbano stare queste velocità come $m : n$; sia $\alpha$ l'angolo BAC; e $\varphi$, $\psi$ gli angoli BAL, CAL, avremo

$$\varphi + \psi = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

$$m \sin \varphi = n \sin \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

onde si ricavano

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{n \sin \alpha}{m + n \cos \alpha}\ ; \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{m \sin \alpha}{n + m \cos \alpha}\ .$$

Preso poi ad arbitrio il raggio $r = \mathrm{LM}$ della ruota BL, sarà $r' = \frac{mr}{n}$ quello dell'altra ruota CL.

Le medesime formole si applicano alla disposizione della *fig.* 24, cangiando solo il segno di $\psi$ nella equazione (1), e con ciò si trova

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha - m}\ ; \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{m \sin \alpha}{n - m \cos \alpha}\ ;$$

nel caso particolare di $\frac{m}{n} = \cos \alpha$, viene $\operatorname{tang} \varphi = \infty$ e la disposizione delle due ruote mutasi in quella della *fig.* 23.

107. Quando i due assi non sono nello stesso piano, e per conseguenza comunque prolungati non s'incontrano, la costruzione precedente non è più possibile, ed il moto non può trasmettersi per mezzo di due sole ruote coniche. La difficoltà tuttavia si può eludere impiegando quattro ruote invece di due, nel modo indicato nella *tav.* 9, *fig.* 1, oppure due ruote semplici ed una ruota doppia, come nella *fig.* 2. Essendo AB, CD i due assi tra i quali il movimento si dee trasmettere, si prendano ad arbitrio due punti A, C sopra questi due assi, e si conduca la retta AC che li taglierà tutti e due; considerando poi questa retta come un terzo asse di rotazione, il quale incontri ciascuno dei primi, sarà facile, con l'aiuto delle cose insegnate, trasmettere il movimento dall'asse AB all'asse AC, poi da questo all'asse CD: nel che si procederà come segue.

Si segnino sopra un piano tre rette BA, AC, CD (*fig.* 3) che comprendano fra loro gli angoli BAC, ACD, rispettivamente eguali agli angoli indicati dalle stesse lettere nelle *figg.* 1 e 2; quindi supponendo che le velocità angolari delle due ruote estreme intorno agli assi AB, CD sieno date, si scelga un valore qualunque intermedio per la velocità angolare intorno all'asse AC; si costruiscano nel modo insegnato di sopra le rette AL, CL′ tali, che girando la prima intorno agli assi AB, AC, e la seconda intorno agli assi CA, CD, sieno atte a generare quattro coni capaci di trasmettersi il movimento con le assunte ragioni di velocità. Pel punto C si tiri CK, la quale faccia con CA l'angolo KCA eguale all'angolo ACL′, e sia K il punto dov'essa incontrerà AL. Da questo punto K si abbassino KO perpendicolare sopra AB, e KP perpendicolare sopra AC; questa seconda perpendicolare KP si prolunghi finchè incontri in M la retta CL, e dal punto M si cali MQ perpendicolare sopra CD. Finalmente di qua e di là dal punto P si prendano ad arbitrio le distanze P$p$, P$p'$, e si conducano le rette $pk$, $ko$ parallele a PK, KO, e

$p'm$, $mq$ parallele a PM, MQ. Il trapezio KO$ok$ ed il trapezio MQ$qm$, girando intorno agli assi AB, CD rispettivamente genereranno le ruote estreme semplici H, E della *fig.* 2: e i due trapezi KP$pk$, MP$p'm$, girando intorno all'asse comune AC, genereranno la ruota oziosa doppia FG della medesima figura. Io lascio ai miei lettori la fatica e la soddisfazione di trovare da se stessi la dimostrazione della costruzione indicata, cioè la ragione per cui le ruote così costrutte si trasmetteranno infatti il movimento con le velocità angolari date.

Questa soluzione, come si vede, è doppiamente indeterminata in quanto: 1° Può scegliersi assolutamente ad arbitrio la direzione AC dell'asse delle ruote *ausiliarie*, od *oziose*; 2° Può pure scegliersi a piacimento la velocità angolare di queste medesime ruote. Quanto alla prima indeterminazione, le due soluzioni più semplici consisteranno o nel condurre la AC in guisa che faccia angoli eguali coi due assi dati AB, AC, la qual cosa è sempre possibile; oppure (*fig.* 4) nel prendere quest'asse ausiliare CA' parallelo ad uno dei due assi AB, ed in guisa che incontri l'altro CD in qualsivoglia punto C. Con questa seconda scelta le due ruote H$k$ e $k$M riusciranno cilindriche, le due altre M$m$ ed M$n$ riusciranno coniche; si avranno i raggi delle due prime dividendo l'intervallo BC dei loro assi in parti inversamente proporzionali alle velocità angolari delle due ruote; gli angoli al vertice dei due coni $m$CM, MC$n$ si determineranno dividendo l'angolo A'CD nel modo poc'anzi insegnato.

Quanto alla seconda indeterminazione, cioè quanto alle velocità da darsi alle ruote ausiliarie, la più semplice e più conveniente soluzione sembra che consista nel fare questa velocità eguale alla media proporzionale tra quelle delle due ruote estreme H$k$ ed M$n$: così se si voglia che, mentre H$k$ farà un giro, M$n$ ne faccia nove, converrà far sì che nel tempo medesimo K$m$ ne faccia tre, essendo il tre medio proporzionale tra l'uno ed il nove.

108. Ho detto nel § che precede, che quando due assi non sono nello stesso piano, cosicchè comunque prolungati non s'incontrino, non è più possibile, per mezzo di due coni soli, di trasformare un moto equabile di rotazione, fatto intorno ad uno di questi assi, in un altro moto equabile di rotazione fatto intorno all'altro asse. A rigor di termini questa proposizione è esatta; può dimostrarsi però, che la trasmissione equabile del movimento è tuttavia possibile tra due soli pezzi, purchè ai coni si sostituiscano due tronchi di *iperboloide* convenientemente determinati; e che a questi posson poi nella pratica sostituirsi con approssimazione sufficiente due tronchi di coni, tangenti agli iperboloidi medesimi. Acciò questa dimostrazione possa essere intesa, premetterò qui alcune facili nozioni elementari sulla generazione e sulle proprietà della superficie, alla quale i geometri hanno imposto il nome di *Iperboloide di rivoluzione ad una falda.*

Siano OO′ AB (*tav.* 9, *fig.* 5) due rette comunque condotte nello spazio, cosicchè le direzioni loro non s'incontrino. La comune perpendicolare PP′ a queste due rette si determinerà, com'è noto, conducendo per qualunque punto O di una di esse, la retta O*a* parallela alla AB; e da qualunque punto A della AB, abbassando la perpendicolare A*a′* sul piano delle due rette OO′, O*a*; poichè dal piede *a′* di questa perpendicolare, tirando nel piano ora detto la *a′b′* parallela ad O*a*, il punto P′ in cui essa taglierà la OO′ sarà il piede della comune perpendicolare cercata P′P, la quale sarà pure la più breve distanza tra le due rette OO′, AB.

Ciò posto, si concepisca che la retta AB si faccia girare intorno alla OO′, in modo che ognuno de' suoi punti descriva una circonferenza di circolo, posta in un piano perpendicolare ad OO′, ed avente il suo centro in quest'asse. Dal complesso di tutte queste circonferenze (fra le quali la minima sarà quella generata dal punto P) risulterà una superficie curva di rivoluzione, di cui OO′ sarà l'asse, e che andrà indefinitamente allargandosi, quasi a guisa di due imbuti opposti di qua e di là della circonferenza minima, la quale suol chiamarsi *circolo di gola;* questa superficie è appunto un iperboloide di rivoluzione ad una falda, e se ne vede nelle *figg.* 6 e 7 rappresentato un segmento compreso tra due piani EE', FF' paralleli a quello del circolo di gola GG', e ad eguali distanze da esso. Nella prima di queste figure la superficie è proiettata sopra uno de'suoi piani meridiani, ossia sopra un piano condotto per l'asse; le rette AB, A'B'..... indicano altrettante posizioni successive della retta generatrice, collocate nella parte visibile od anteriore della superficie; le rette punteggiate *ab*, *a'b'*..... indicano altre posizioni della generatrice, collocate sulla parte invisibile o posteriore dell'iperboloide; nella seconda figura la superficie si finge proiettata sovra un piano inclinato all'asse.

La superficie generata nel modo ora descritto è manifestamente la medesima che si genera facendo girare intorno all'asse OO' la curva FGH; ora questa curva è della medesima natura delle sezioni che si fanno in un cono circolare segandolo con piani paralleli all'asse del cono, ed alle quali si dà il nome di *iperbole;* egli è perciò appunto che alla superficie, che stiamo esaminando, è stato imposto il nome di *iperboloide.*

Egli è degno di osservazione, che se pel punto P (*fig.* 5), della comune perpendicolare alle due rette OO', AB, si conduce un'altra retta A'B', anch'essa perpendicolare a PP', e tale che faccia col piano che contiene OO' e PP' un angolo eguale a quello che fa con esso la retta AB, queste due rette AB, A'B' essendo collocate rispetto all'asse in modo assolutamente simmetrico dalle due parti del piano PP'OO', genereranno, girando intorno a quell'asse, la medesima superficie; ond'è che per ciascun punto M di questa (*fig.* 7) si posson sempre condurre due rette AMB, A'MB', interamente contenute sulla superficie dell'iperboloide, e che non sono altre che le posizioni in cui le due generatrici AB, A′B′ della *fig.* 5 vengono a passare pel dato punto M.

109. Siano ora OO′, QQ′ (*fig.* 8) due assi dati non giacenti nello stesso piano, e tra i quali debba trasmettersi un moto equabile di rotazione, con una data ragione di velocità angolari; sia PP′ la loro comune perpendicolare, e $qq'$ la proiezione di QQ′ sul piano condotto per OO′ parallelamente alla medesima QQ′. Prendasi sulla PP′ il punto K, che la divida in parti reciprocamente proporzionati alle date velocità angolari relative agli assi OO′, QQ′. Nel piano $qq'$OO′ e pel punto P′ di esso si conduca la retta A′B′, la quale divida l'angolo $q$P′O in due parti tali, che le perpendicolari $mn$, $mr$, abbassate da qualsivoglia punto $m$ della A′B′ sulle OO′, $qq'$ stiano pure in ragione reciproca di quelle velocità angolari; la qual cosa si farà nel modo insegnato nel § 106. Finalmente pel punto K si conduca la retta AB, parallela ad A′B′. Sarà questa la retta la quale, girando successivamente intorno ai due assi dati OO′, QQ′, genererà due iperboloidi di rivoluzione, atti a trasmettersi per contatto il movimento di rotazione con la voluta ragione di velocità angolari.

Infatti questi due iperboloidi avranno comune la generatrice AB, e saranno tangenti l'uno all'altro secondo la generatrice medesima; e qualunque punto di questa nel rotare successivamente intorno ai due assi, genererà due circoli, i cui raggi e, per conseguenza, le cui circonferenze staranno nella ragione inversa delle velocità angolari date; epperò gli infiniti circoli descritti da AB intorno ad OO′ saranno condotti tutti nello stesso modo (cioè con la medesima velocità angolare), ciascuno dal circolo corrispondente descritto dal medesimo punto di AB intorno a QQ′; ciò risulta dalla dimostrazione seguente:

Pel punto P dell'asse QQ′ si tiri A″B″ parallela ad AB e ad A′B′; pel punto M preso comunque sulla generatrice AB si tiri $m$M$m'$ parallela ed eguale a PP′, cioè perpendicolare ai piani $q'P'A'$, $Q'PA''$; dal punto $m$ si abbassino le $mn$, $mr$ perpendicolari sopra $P'O'$, $P'q'$; e dal punto $m'$ si abbassi similmente sulla $PQ'$ la perpendicolare $m'r'$; conducansi finalmente le $Mn$, $Mr'$, che saranno le perpendicolari abbassate da M sui due assi $OO'$, $QQ'$, cioè i raggi delle circonferenze descritte dal punto M intorno a questi due assi.

A motivo dei triangoli rettangoli $Mmn$, $Mm'r'$ saranno

$$Mn = \sqrt{\overline{Mm}^2 + \overline{mn}^2}\,, \qquad Mr' = \sqrt{\overline{Mm'}^2 + \overline{m'r'}^2}\,.$$

Ora, essendo $Mm = KP'$ ed $Mm' = KP$, le $Mm$, $Mm'$ staranno tra di loro nella ragion reciproca delle velocità angolari date; e nella medesima ragione staranno pure per costruzione le perpendicolari $mn$, $mr$; e poichè $m'r' = mr$ anche $mn$ ed $m'r'$ staranno nella stessa ragione. Dunque finalmente staranno ancora nella ragione medesima le $Mn$, $Mr$, ossiano i raggi dei due circoli descritti dal punto M intorno ai due assi dati; e girando il primo circolo intorno ad $OO'$, esso condurrà il secondo intorno a $QQ'$ con la voluta velocità.

110. La costruzione insegnata nel § precedente darà il meccanismo rappresentato in prospettiva nella *fig.* 9. Ma acciò il moto si trasmetta dall'iperboloide $MmnN$ mobile intorno all'asse $Q'$, all'iperboloide $MBB'M'$ mobile intorno all'asse $O'$, non è necessario impiegare di questi due iperboloidi porzioni sì grandi come quelle disegnate nella figura, e basterà fermare sui due assi rispettivamente due tronchi come $MmhH$, $MM'H'H$ che abbian comune la generatrice MH; ora, purchè questi due tronchi non si prendano troppo vicini ai circoli di gola dei rispettivi iperboloidi, essi appena differiranno da due tronchi di coni retti, descritti intorno agli assi O, Q, in modo che tocchino i due iperboloidi secondo le circonferenze medie $LL'$, $Ll$ dei tronchi medesimi.

Descritte adunque, come si veggono nelle *figg.* 10 e 11, le curve meridiane dei due iperboloidi, e segnati su queste i segmenti MM'H'H, i quali girando intorno agli assi rispettivi genererebbero i tronchi iperboloidali MH, M$h'$ della *fig.* 9, se si condurranno ai punti di mezzo L, L' degli archi MH, M'H' (*figg.* 10 e 11) le tangenti LT, L'T, si avranno così i trapezi che, sostituiti ai segmenti curvilinei MHH'M', genereranno i coni tronchi, equivalenti ai tronchi di iperboloidi.

Si noti tuttavia che questi due tronchi di cono, dovendosi disporre in guisa che i loro assi coincidano con le rette OO', QQ' (*figg.* 8 e 9), le quali non sono nel medesimo piano essi non si toccheranno secondo una generatrice rettilinea, come le ruote coniche della *fig.* 20, *tav.* 8; ma bensì in un punto solo. Vero è, che per la scambievole pressione e per lo scambievole attrito, che avranno luogo tra i due coni, verranno essi logorandosi ed intaccandosi a vicenda, sicchè dopo alcun tempo essi sarannosi da se stessi foggiati a guisa di segmenti iperboloidali.

Ho detto *per lo scambievole attrito*, poichè havvi ancora tra le ruote coniche propriamente dette, cioè collocate con gli assi concorrenti nel vertice comune de'due coni, e le ruote iperboloidali, oppure anche coniche, ma poste con gli assi per isbieco, havvi dico questa differenza, che tra le prime il contatto si rinnova continuamente per solo sviluppo, nelle seconde per isviluppo accompagnato da strisciamento; e da strisciamento tanto più sensibile, quanto maggiore è l'obliquità dei loro assi (1).

(1) Nota *ai* §§ 108, 109 *e* 110.

Il linguaggio dell'algebra renderà più chiare e più compiute le nozioni esposte in questi tre paragrafi.

Sia $a$ la minima distanza PP' della retta AB dall'asse di rotazione OO'; e sia $\alpha$ l'angolo O'P'$a'$ che l'asse medesimo fa con la $a'b'$ parallela ad AB (*fig.* 5).

Prendendo il punto P' per origine delle coordinate, e l'asse OO' per asse della $x$, la perpendicolare AR abbassata dal punto A della generatrice sull'asse medesimo, sarà manifestamente eguale all'ordinata corrispondente all'ascissa P′R della curva meridiana della superficie generata dalla retta AB; detta dunque $y$ questa ordinata, sarà

$$y^2 = \overline{Aa'}^2 + \overline{a'R}^2 = a^2 + x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha ;$$

ossia

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha}{a^2} = 1$$

l'equazione della curva meridiana; è questa per conseguenza una iperbola, il cui asse trasverso $2a$ coincide con l'asse della $y$, e l'asse immaginario, diretto secondo l'asse della $x$, è $= \frac{2a}{\operatorname{tang}\alpha}$.

Passando quindi alla costruzione del § 109, dicansi (*fig.* 8):

$h$ la minima distanza PP′ dei due assi dati OO′, QQ′;

$\gamma$ l'angolo O′P′$q'$ dell'asse OO′, con la $qq'$ parallela a QQ′;

$\varphi$, $\psi$ i due angoli O′P′A′, e Q′PA″ $= q'$P′A′ che gli assi OO′, QQ′ fanno con le A′B′, A″B″, parallele alla generatrice AB; e sia $m:n$ la ragione delle velocità angolari relative agli assi OO′, QQ′. In virtù delle formole stabilite nella nota al § 106, saranno

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{n \sin\gamma}{m + n\cos\gamma}\,, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{m \sin\gamma}{n + m\cos\gamma}\,;$$

posti poi KP $= a$, K′P′ $= a'$ saranno ancora

$$a = \frac{nh}{m+n}\,, \qquad a' = \frac{mh}{m+n}$$

i semi-assi trasversi delle due iperbole generatrici degli iperboloidi domandati, ossiano i raggi dei circoli di gola di questi iperboloidi; i semi-assi immaginarii poi, o semi-assi di rivoluzione degli iperboloidi medesimi, saranno

$$b = a \operatorname{cotang}\varphi = \frac{h(m + n\cos\gamma)}{(m+n)\sin\gamma}\,;$$

$$b' = a' \operatorname{cotang}\psi = \frac{h(n + m\cos\gamma)}{(m+n)\sin\gamma}\,.$$

Se ora si vuole che la sezione media LL′ fatta nel segmento MH′ dell'iperboloide mobile intorno all'asse O (*fig.* 11) abbia il raggio $r$; la sezione media L$l$ fatta nel segmento corrispondente M$h$ dell'altro iperboloide (*fig.* 10) dovrà avere il raggio $r' = \frac{m r}{n}$, e le distanze di queste sezioni dai corrispondenti piani di gola, saranno

$$x = \sqrt{(r + a)(r - a)}\,\text{cotang}\,\varphi = \frac{m + n\cos\gamma}{(m + n)\sin\gamma}\sqrt{(m + n)^2 r^2 - n^2 h^2}\,;$$

$$x' = \sqrt{(r' + a')(r' - a')}\,\text{cotang}\,\psi = \frac{m}{n}\cdot\frac{n + m\cos\gamma}{(m + n)\sin\gamma}\sqrt{(m + n)^2 r^2 - n^2 h^2}\,.$$

E detti finalmente $\theta$, $\theta'$ gli angoli al vertice dei due coni tangenti ai due iperboloidi secondo le circonferenze delle sezioni, i cui raggi sono $r$ ed $r'$, verranno

$$\text{tang}\,\theta = \frac{x}{r}\,\text{tang}\,\varphi = \frac{n^2 \sin\gamma}{r(m + n)(m + n\cos\gamma)}\sqrt{(m + n)^2 r^2 - n^2 h^2}\,;$$

$$\text{tang}\,\theta' = \frac{x'}{r'}\,\text{tang}\,\psi = \frac{m^2 \sin\gamma}{r(m + n)(n + m\cos\gamma)}\sqrt{(m + n)^2 r^2 - n^2 h^2}\,.$$

Siano per esempio $h = 0^{m},2$ , $\gamma = 45^\circ$; $m = 2$, $n = 3$

$r = 0^{m},3$ , $r' = 0^{m},2$

Verranno $a = 0^{m},12$ , $a' = 0^{m},08$

$\varphi = 27^\circ.\,14'$ , $\psi = 17^\circ.\,46'$

$b = 0^{m},233$ , $b' = 0^{m},250$

$x = 0^{m},531$ , $x' = 0^{m},572$

$\theta = 25^\circ\,15'$ , $\theta' = 16^\circ.\,22.$

# CAPITOLO SEDICESIMO

## DELLA TRASMISSIONE DEL MOTO PER ISVILUPPO CON RAGION VARIABILE DI VELOCITÀ.

111. Quando i lembi curvi CE, DF di due pezzi mobili intorno ai centri A, B (*tav.* 9, *fig.* 13), si toccano in un punto M della linea de' centri, il moto può per un istante trasmettersi dall'uno all'altro per isviluppo, siccome abbiamo veduto in principio del cap. XIV (§ 98). Ma perchè il moto si trasmetta indefinitamente in questa maniera è necessario che in tutte le successive posizioni dei due pezzi, il loro punto di contatto sempre cada nella linea de' centri; è necessario cioè, che quando pel girare dei due pezzi i punti $m$, $m'$ posti sui due perimetri, dalla stessa parte e ad egual distanza da M, saranno venuti a toccarsi, questo loro contatto succeda in un punto situato sulla linea AB: ora si richieggono per ciò due condizioni, cioè

1° Che la somma delle distanze A$m$, B$m'$ di questi due punti dai centri A, B sia precisamente eguale alla distanza AB.

2° Che le due tangenti $mt$, $m't'$ condotte ai punti $m$, $m'$ delle due curve si confondano tra loro quando questi punti saranno venuti a toccarsi, il che non può avvenire se la somma dei due angoli A$mt$, B$m't'$ che le tangenti $mt$, $m't'$ fanno coi *raggi vettori* A$m$, B$m'$, non è precisamente eguale a due angoli retti; poichè quando i due punti $m$, $m'$ coincideranno, i loro raggi vettori A$m$, B$m'$ saranno distesi in linea retta sul prolungamento l'uno dell'altro secondo la retta AB, e la comune tangente alle due curve farà con essi due angoli, la cui somma equivarrà a due angoli retti.

Se ora noi supponiamo che queste due condizioni sieno adempiute, e che il pezzo movente ACE giri pel verso CE, è chiaro ch'esso si sospingerà innanzi il pezzo cedente BDF facendolo camminare pel verso DF, ed abbiam già mostrato che le velocità angolari dei due pezzi saranno inversamente proporzionali ai due segmenti AM, BM della linea dei centri. Ora nella continuazione del movimento, il segmento AM continuamente cresce, e il segmento BM per conseguenza continuamente diminuisce; epperò se il pezzo ACE si muove equabilmente, il pezzo BDF camminerà con velocità crescente, ossia con moto accelerato. Se si volesse invece ottenere un movimento ritardato, converrebbe che il movente AEC camminasse pel verso EC, cosicchè continuamente scemasse il segmento AM e crescesse il segmento BM della linea dei centri. Ma allora è evidente che il lembo curvo EC, invece di premere il lembo opposto FD e di spingerlo innanzi, se ne verrebbe anzi scostando, e non vi sarebbe trasmissione del movimento, salvo che il cedente BM o per proprio peso, o per effetto di una molla fosse costretto a tenersi sempre in contatto col pezzo AM. Si rimedia però a questo sconcio nel modo rappresentato nella *fig.* 14 col sostituire ai lembi lisci due lembi dentati; poichè allora il moto egualmente si trasmette pel verso EC e pel verso CE; ma si introduce così, in luogo di un semplice contatto di sviluppo tra i due lembi, un contatto di scorrimento, e per conseguenza un attrito tra i denti dell'uno e quelli dell'altro pezzo.

Le due condizioni, che abbiamo or ora espresse, limitano grandemente il numero delle curve che ponno combinarsi insieme per farle servire alla comunicazione del movimento per isviluppo; noi faremo conoscere qui quelle sole, per le quali più facilmente si dimostrano adempiute, entrambe le condizioni richieste; e rimanderemo ad una nota in fine del capitolo la teoria matematica più generale di queste curve.

112. Presa ad arbitrio una retta OA (*tav.* 10, *fig.* 2), si tiri in A la retta $At$ che faccia con la prima un angolo qualunque $OAt$, e sopra questa retta si prenda la parte piccolissima $Aa$. Si conduca poi la $Oa$, e pel punto $a$, la $at'$ che faccia con $Oa$ l'angolo $Oat'$ eguale ad $OAt$, e sulla $at'$ si prenda la parte $aa'$ eguale ad $Aa$; si conduca $Oa'$, nel punto $a'$ si faccia l'angolo $Oa't''$ eguale ancora ad $OAt$, e sulla $a't''$ si prenda $a'a''$ eguale ad $Aa$; proseguendo così indefinitamente, si farà un poligono di lati piccolissimi, e tutti eguali fra loro $Aaa'a''a'''$...., nel quale gli angoli $OAt$, $Oat'$, $Oa't''$, $Oa''t'''$ ecc. che i successivi lati $Aa$, $aa'$, $a'a''$; $a''a'''$ ecc. fanno con le rette OA, $Oa$, $Oa'$, $Oa''$ ecc. condótte dal centro O ai vertici del poligono, saranno tutti eguali. Se dunque i lati $Aa$, $aa'$ ecc. si saranno presi abbastanza piccoli, il poligono $Aaa'a''a'''$ si confonderà con una curva, nella quale l'angolo di qualunque tangente $at$ col raggio vettore $Oa$ condotto al punto di tangenza sarà dapertutto lo stesso. Questa curva chiamasi *spirale logaritmica*, ed è evidente che essa si confonde col circolo, quando l'angolo della tangente col raggio vettore è di 90 gradi.

Dal centro O e coi raggi OA, $Oa$, $Oa'$..... si descrivano gli archi di circolo $Ab$, $ab'$, $a'b''$....., che per essere molto piccoli non differiranno sensibilmente da linee rette. I triangoli rettangoli $Aab$, $aa'b'$, $a'a''b''$...... saranno tutti eguali, poichè le loro ipotenuse $Aa$, $aa'$, $a'a''$..... sono tutte eguali, e gli angoli $aAb$, $a'ab'$, $a''a'b''$...... sono pure tutti eguali: i cateti $ab$, $a'b'$, $a''b''$...., opposti ad angoli eguali saranno dunque anche tutti eguali, cioè la differenza tra due raggi vettori consecutivi sarà dapertutto la stessa.

La spirale logaritmica gode pure di un'altra notabile proprietà che ne agevola la costruzione per punti, e che può dimostrarsi in modo elementare. Dal centro O (*tav.* 10, *fig.* 3) si conducano alla curva i raggi OA, $Om$, $Om'$, $Om''$......, che comprendano tra loro gli angoli eguali e piccolissimi

$AOm$, $mOm'$, $m'Om''$.....; e fatto centro in O si descrivano gli archi circolari, $Ac$, $mc'$, $m'c''$..... I triangoli $Acm$, $mc'm'$, $m'c''m''$......, a motivo della picciolezza dei loro lati, potranno riguardarsi come rettilinei, e rettangoli in $c$, $c'$, $c''$......, e saranno tutti simili tra loro, poichè per la proprietà fondamentale della spirale logaritmica gli angoli $Amc$, $mm'c'$, $m'm''c''$...., saranno tutti eguali. Quindi

$$cm : Ac :: c'm' : c'm :: c''m'' : c''m' :: \text{ecc.}$$

Ma gli archi $Ac$, $mc'$, $m'c''$......, essendo tutti dello stesso numero di gradi, le loro lunghezze sono proporzionali ai raggi $OA$, $Om$, $Om'$...... con cui essi sono stati descritti: dunque

$$cm : OA :: c'm' : Om :: c''m'' : Om :: \text{ecc.}$$

E per conseguenza ancora

$$Om : OA :: Om' : Om :: Om'' : Om' :: \text{ecc.}$$

E da questa proporzione si conclude, che due raggi vettori della spirale, i quali facciano tra loro un angolo dato, stanno dapertutto nella medesima ragione; oppure in altre parole, che crescendo in progressione aritmetica l'angolo del raggio vettore con un raggio fisso OA, la lunghezza del raggio vettore cresce in progressione geometrica. I lettori, che conoscono la teorica dei logaritmi, vedranno in ciò il motivo per cui la curva, di cui si parla, ha ricevuto dai geometri il nome di *spirale logaritmica*.

Siano ora $CMmE$, $Dm'MF$ (*fig.* 4) due piastre piane tagliate secondo due spirali logaritmiche eguali e volte in parti contrarie, mobili intorno ai loro centri A, B, e condotte a toccarsi in M. Questo punto di contatto sarà sicuramente sulla linea AB dei centri, poichè per la dimostrata proprietà e per essere eguali le due curve, le loro tangenti MT, MT' faranno angoli eguali coi due raggi vettori MA, MB, e saranno per conseguenza una sul prolungamento dell'altra. Di più prendendo sulle due curve gli archi eguali $Mm$, $Mm'$, e tirando i raggi $Am$, $Bm'$, questi per la natura stessa delle due curve faranno con le tangenti in $m$ ed in $m'$ gli angoli $Amt$, $Bm't'$ che presi insieme saranno evidentemente eguali a due angoli retti; e finalmente la somma dei raggi vettori $Am$, $Bm'$ sarà sicuramente eguale ad AB, poichè quanto $Am$ è maggiore di AM, altrettanto $Bm'$ è minore di $Bm$ per la proprietà or ora dimostrata. Le due piastre potranno dunque comunicarsi il movimento per semplice sviluppo, e i loro lembi curvi si potranno fare lisci; o si dovranno armare di denti secondochè il movimento della piastra cedente dovrà essere accelerato oppure ritardato.

Facile, in virtù delle cose che precedono, è la determinazione della legge con cui andrà variando la velocità angolare del pezzo condotto, supponendo che il pezzo conduttore giri equabilmente. Nella posizione rappresentata nella *fig.* 4 il punto M di contatto dividendo in parti eguali la retta de' centri AB, le velocità angolari dei due pezzi sono eguali; se ora si suppone che le due curve sono state descritte in modo che due raggi vettori, che fanno tra di loro l'angolo $\alpha$, stieno tra di loro $: : 1 : m$, facendo descrivere al pezzo conduttore l'angolo $mMA = \alpha$ pel verso della saetta, il raggio vettore divenendo $Am = m \times AM$ crescerà della quantità $mb = (m - 1)\,AM$; il raggio vettore del pezzo condotto, dovendo diminuire di una eguale quantità, diverrà intanto $Bm' = BM - (m - 1).AM$ ossia (essendo $AM = BM$) $Bm' = (2 - m)\,AM$; epperò la ragione dei due nuovi raggi vettori sarà quella di $m : 2 - m$, e le velocità angolari staranno nella ragione inversa a questa.

113. La ellisse ci somministrerà il mezzo di costruire un altro meccanismo dello stesso genere, ma più frequentemente applicabile, perchè, per essere la ellisse curva chiusa o rientrante, esso sarà suscettivo di moto continuo, mentre con le spirali logaritmiche il moto è necessariamente alternativo. Sieno MCDE, MFGH (*tav.* 9, *fig.* 15) due piastre ellittiche eguali; DM, MG i loro assi maggiori; A, $a$ e B, $b$ i loro

fochi; suppongansi le due piastre girevoli intorno ai fochi A e B; finalmente sia la distanza AB di questi fochi eguale all'asse maggiore comune alle due ellissi. È evidente che, quando le due curve si troveranno collocate come le rappresenta la figura, esse si toccheranno in M sulla linea AB dei centri, e che il punto M sulla ellisse AD sarà nel vertice più vicino al foco A, mentre sull'altra ellisse esso sarà nel vertice più lontano dal foco B. Ora dico che, comunque si faccia girare la piastra AD, essa menerà l'altra BG per semplice sviluppo. Infatti prendansi sulle due periferie gli archi eguali M*m*, M*m'* e si conducano i raggi vettori A*m*; *am*, B*m'*, *bm'*; per essere le due curve perfettamente eguali, e gli archi M*m*, M*m'* anche eguali, sarà A*m* eguale a *bm'*, ed *am* eguale a B*m'*; ma per la proprietà dell'ellisse la somma A*m* più *am* è eguale all'asse maggiore DM, e per conseguenza anche alla distanza AB dei due centri; dunque in questa somma, invece del raggio *am* mettendo il raggio eguale B*m'*, avremo A*m* più B*m'* eguale alla distanza AB, che è la prima condizione necessaria perchè le curve possano trasmettersi il moto per sviluppo. Nei punti *m*, *m'* tiriamo adesso le tangenti *mt*, *m't'*; per un'altra bella proprietà della ellisse l'angolo *amt* è eguale all'angolo A*mx*, e per conseguenza i due angoli *amt*, A*mt* presi insieme fanno due angoli retti; di più, per la perfetta eguaglianza delle due curve, gli angoli *amt*, B*m't'* sono eguali; dunque i due angoli A*mt* e B*m't'* presi insieme sono anche eguali a due retti; dunque le due curve si toccheranno sempre nella linea dei centri; dunque finalmente il moto si trasmetterà dall'una all'altra per semplice sviluppo, come si era annunciato.

Facciasi ora girare la piastra ACDE pel verso indicato dalla saetta, finchè essa e la sua compagna BFMH sieno passate nelle posizioni rappresentate nella *fig.* 16. Se il moto della piastra AD è equabile, quello della BG sarà accelerato, poichè il punto di contatto *m* si allontanerà dal punto A per avvicinarsi al punto B; ma quando le due piastre avranno fatto una mezza rivoluzione, e i punti D, G saranno venuti a toccarsi nel punto I sulla linea dei centri, continuando la piastra AD a girare equabilmente, l'altra dovrà muoversi con moto ritardato, e secondo la osservazione fatta alla fine del § paragrafo precedente, il moto non si potrà più trasmettere, salvo che le due piastre siano armate di denti. Quindi, per la continuità del movimento, le due mezze circonferenze MED, MHG si potranno far liscie, ma le mezze circonferenze opposte MCD, MFG dovranno necessariamente essere dentate. Se poi si richiedesse che la piastra AD potesse trasmettere il movimento sia col girare pel verso della saetta, sia col girare pel verso contrario, le dentature dovrebbero estendersi alle intere circonferenze (*fig.* 17); e questa sarà in ogni caso la miglior disposizione.

I limiti tra i quali va variando la velocità della ruota condotta, presa per unità quella della ruota motrice, sono evidentemente (*fig.* 15) $\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AD}$ ed $\frac{AD}{BM}=\frac{AD}{AM}$; epperò la velocità massima sta alla minima come $\overline{AD}^2 : \overline{AM}^2$, ossia come il quadrato della somma del semi-asse maggiore e della eccentricità, al quadrato della differenza di queste due quantità; così se si volesse per esempio, che queste due velocità estreme stessero tra di loro come quattro all'uno, la somma del semi-asse e della eccentricità dovrebbe esser doppia della loro differenza, ossia che la eccentricità dovrebb'essere la terza parte del semi-asse.

114. Le ruote ellittiche ora descritte, la cui prima idea sembra dovuta a Desaguliers (1); ci danno il mezzo di trasformare un moto rotatorio continuo ed equabile in un moto

(1) Giovanni Teofilo Desaguliers, nato alla Roccella nel 1683, studiò, visse e morì (1743) in Inghilterra dov'era rifuggito per motivo di religione. Fu professore di fisica nella Università di Oxford.

rotatorio e continuo, ma nel quale ad una mezza rivoluzione fatta con moto accelerato succede una mezza rivoluzione con moto ritardato, e viceversa. Esse hanno suggerito ad altri il pensiero di ruote di forma meno semplice, mercè delle quali si ottiene un moto, in cui le vicende di accelerazione e di ritardamento si succedono più volte in ciascuna rivoluzione.

Infatti se si concepiscono, per esempio, le due curve a tre lobi MECFDG, ME′C′F′D′G′ (*tav.* 10, *fig.* 5) così descritte, che possano trasmettersi il movimento per semplice sviluppo, è palese che, mentre la prima curva descriverà intorno al proprio centro A l'angolo MAD eguale alla terza parte di quattro angoli retti, l'altra curva descriverà pure intorno al suo centro B l'angolo eguale MBD′; ma questo movimento non sarà equabile, poichè nella prima metà di esso il raggio della prima curva va diminuendo, quello della seconda crescendo, epperò il moto di questo si va rallentando; ma nella seconda metà del movimento, cioè mentre le due curve descrivono gli angoli GAD, G′BD′, il raggio della prima va crescendo, e quello della seconda diminuendo, sicchè il movimento di questa si va accelerando, finchè, venuti a toccarsi in M i due punti D, D′ delle due curve, la velocità della seconda riprende il suo valore iniziale; e queste vicende si riproducono tre volte identicamente durante una intiera rivoluzione delle due curve.

I limiti, tra i quali va variando la ragione delle velocità angolari delle due curve, sono evidentemente $\frac{AM}{MB'}$ ed $\frac{AG}{G'B'}$; onde a motivo di $G'B = AM$, e $BM = AG$, la velocità *massima* della seconda curva sta alla sua velocità *minima* $: : AM^2 : AG^2$.

Simile sarebbe il gioco delle due curve a quattro lobi della *fig.* 6, senonchè le vicende di ritardamento e di accelerazione si ripeterebbero quattro volte a ciaschedun giro; e nello stesso modo possono concepirsi curve a cinque, sei o più lobi.

Per descrivere una coppia di tali curve, descrivasi prima una mezza ellisse *fgd* (*fig.* 7) prendendo le distanze P*f*, P*d* di uno dei fochi P dai due vertici *f*, *d*, rispettivamente eguali al minimo ed al massimo dei raggi AF, AD (*figg.* 5 e 6) delle curve che si vogliono costruire.

Sull'asse maggiore *fd* della ellisse, ed intorno al foco P facciansi allora tanti angoli eguali tra di loro, quanti si vorrà, *f*P1, 1P2, 2P3...., i quali presi insieme faranno due retti; ed intorno al centro A della curva da costruirsi si conducano le rette indefinite AG, AF, AD...., le quali facciano tutte angoli eguali tra loro, e siano in numero doppio di quello dei lobi della curva domandata, in modo che ciascuno di questi angoli come FAC sia eguale a due retti divisi pel numero dei lobi. Quest'angolo medesimo FAC si divida poi in tante parti eguali, quanti sono gli angoli che si sono formati intorno al polo P della ellisse, e si portino a partire da A le distanze AF, A1, A2, A3....., AC rispettivamente eguali ai raggi P*f*, P1, P2, P3..... P*d*: della ellisse: la curva continua condotta pei punti F, 1, 2, 3..... C sarà il contorno della metà di uno de' lobi della curva domandata; e questa si compierà, ripetendo il medesimo arco FC, alternativamente volto da una parte e dall'altra, quanti sono i mezzi lobi di cui la curva dee essere composta.

Possono ancora combinarsi insieme due curve, che non abbiano lo stesso numero di lobi, come per esempio una curva di tre lobi, con una di quattro (*fig.* 8); ma le due curve non debbono allora essere costrutte per mezzo della medesima ellisse, ma sì ciascuna per mezzo di una ellisse particolare. Si potrà fra altri metodi impiegare il seguente: descrivasi con raggio qualunque il circolo *ff*'P*d*'*d* (*fig.* 9), e sulla tangente indefinita PZ si portino tante parti eguali, di grandezza arbitraria, PQ, QR, RS, ST......., quanti debbono essere i lobi di una delle due curve, per esempio tre; dal punto S, cui si giunge così, si tiri la segante S*d* pel centro O del circolo; questa segante medesima S*d* e la sua parte esterna S*f* saranno le distanze di uno dei fochi dai due vertici della ellisse ausiliare da impiegarsi, nel modo sovra insegnato, per la costruzione della curva a tre lobi. Quindi si comprende che, se l'altra curva compagna dovesse avere quattro lobi, si porterebbero da P in T sulla tangente PZ, quattro parti eguali a PQ, e condotta la segante T*d'* si farebbe una seconda ellisse prendendo le T*d'*, T*f'* per distanze di uno de' fochi dai due vertici, e si procederebbe poi come si è insegnato; le due curve di tre e di quattro lobi così costrutte sarebbero atte a condursi a vicenda per contatto di semplice sviluppo (1).

115. I capitoli seguenti ci daranno occasione di descrivere altri meccanismi destinati a trasformare tra assi paralleli il moto rotatorio continuo ed equabile, in moto rotatorio variabile od intermittente. Conchiuderemo intanto il presente capitolo con la descrizione di due meccanismi dovuti, l'uno all'astronomo danese Roëmer (2), l'altro all'illustre geometra olandese Ugenio (3), per la trasformazione del moto rotatorio tra assi non paralleli e con ragion variabile di velocità.

(1) Veggasi per più ampli particolari la nota aggiunta in fine di questo capitolo: e si avverta che, per cansare la confusione che nasce dalle figure troppo minute, la *fig.* 9 della *tav.* 10 si è costrutta in iscala doppia di quella della corrispondente *fig.* 8.

(2) Olào Rœmer, nato a Copenaghen nel 1644, venne in Francia nel 1672 e vi dimorò fino al 1681. Fu membro dell'Accademia delle scienze di Parigi; il suo più bel titolo di gloria è di aver determinata la velocità della luce; morì in patria nel 1710.

(3) Cristiano Huyghens di Zuylichem, detto dagli Italiani Ugenio, nacque all'Aia nel 1629, e dopo molti viaggi fermò sua dimora a Parigi; è illustre nella storia della scienza per molte importanti scoperte, e fra le sue invenzioni meccaniche merita particolar menzione l'applicazione del pendolo agli orologi. Morì nella sua città nativa l'anno 1695.

Siano (*tav.* 9, *fig.* 18) A*a*, B*b* due assi paralleli o non paralleli, ma collocati nel medesimo piano, e CDFE, GHIL due tronchi di coni circolari, volti con le loro maggiori basi a ritroso e mobili intorno agli assi A*a*, B*b*. Se i lati CD, GH fossero in contatto su tutta la loro lunghezza, il movimento non potrebbe trasmettersi in modo regolare da un cono all'altro, senza strisciamento delle due superficie, poichè la base DF del primo cono, minore della base contigua HI del secondo, dovrebbe camminare con velocità angolare maggiore, mentre all'incontro la base CE, maggiore della GL, dovrebbe andare con velocità minore che questa. I due lati CD, GH adunque non si toccano, ma fanno tra di loro un piccolo angolo C*a*G, il cui vertice *a* coincide con quello di uno dei due coni. Questo porta sulla sua superficie convessa uno strettissimo *risalto* o *pane* MRN secondo una curva qualunque rientrante in se stessa, e terminato esternamente da una fascia o benda della superficie conica, generata dalla rivoluzione della retta GH intorno all'asse A*a*. In tutte le posizioni del meccanismo i due pezzi toccansi unicamente secondo una porzione di generatrice eguale alla larghezza del *pane*; e qualora questa sia piccolissima lo strisciamento delle due superficie l'una sull'altra sarà trascurabile. Egli è manifesto poi che, girando equabilmente il cono CF, l'altro girerà con velocità variabile, e che a ciascuno istante le velocità angolari dei due coni staranno tra di loro in ragion reciproca delle perpendicolari MP, MQ, abbassate dal punto M di contatto sugli assi dei due coni (1).

(1) Dicansi $\alpha$, $\beta$ gli angoli al vertice dei due coni A*a*, B*b*, ed $l$ la distanza *ab* di questi due vertici misurata sulla comune generatrice GH della superficie del cono condotto B*b*, e del verme del cono conduttore A*a*. Sia ancora $z$ la distanza variabile *a*M del punto di contatto M dal vertice *a* del cono conduttore; $\theta$ l'angolo compreso tra il meridiano *a*MA che passa pel punto M, ed un piano meridiano qualunque considerato come fisso nel cono girante. Essendo data la curva MRN,

Non men semplice è il meccanismo dell'Ugenio: esso consiste in un anello orizzontale BCD mobile intorno ad un asse A$a$ verticale ed eccentrico (*tav.* 9, *fig.* 19); un cilindro EF, mobile intorno a un asse orizzontale, che andrebbe incontrare in I il prolungamento dell'asse A$a$, si appoggia sull'orlo dell'anello e riceve da esso il movimento per via dello scambievole attrito; ed è manifesto che girando l'anello equabilmente, la velocità del cilindro verrà facendosi ora maggiore, ora minore, secondochè il suo punto di contatto con l'anello sarà più lontano o più vicino all'asse A$a$.

La legge del moto del cilindro si potrà dunque variare

sarà pur data la relazione che passa tra $z$ e $\theta$, relazione che rappresenteremo con l'equazione

$$z = f(\theta).$$

Dicasi ora $\varphi$ l'angolo descritto intorno al proprio asse B$b$ del cono condotto, mentre il primo cono descrive l'angolo $\theta$; le due perpendicolari MP, MQ abbassate dal punto M sugli assi dei due coni, saranno manifestamente

$$\mathrm{MP} = z \sin\alpha\,, \qquad \mathrm{MQ} = (l-z)\sin\beta\,;$$

epperò le velocità angolari dei due coni ad ogni istante staranno tra di loro

$$:: (l-z)\sin\beta : z\sin\alpha\,,$$

cioè sarà

$$d\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{z\,d\theta}{l-z}\,;$$

e siccome i due angoli $\theta$ e $\varphi$ si suppongono nulli insieme

$$\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left\{ l\int_0^\theta \frac{d\theta}{l-z} - \theta \right\}.$$

in infinite guise facendo l'anello di figura differente dalla circolare (1).

(1) Se, come si suppone nel testo, l'asse del cilindro prolungato va incontrare il prolungamento dell'asse dell'anello, qualunque sia la curva di questo, detti $r$ il raggio vettore condotto dal centro A al punto M; $\theta$ l'angolo che questo raggio fa con quello, che nella posizione iniziale dell'anello era parallelo all'asse del cilindro; $\rho$ il raggio di questo, e $\varphi$ l'angolo da esso descritto intorno al proprio asse; sarà $\rho d\varphi = r d\theta$, e le velocità angolari $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ dell'anello e del cilindro, staranno in ciascuno istante in ragion reciproca dei raggi $r$ e $\rho$.

Se poi, per maggiore generalità, si finge che i due assi non sieno nel medesimo piano (*tav.* 10, *fig.* 1); e si rappresenta con $b$ la loro comune perpendicolare AB; designando sempre con la lettera $r$ il raggio vettore AM condotto al punto di contatto M, e con $\theta$ l'angolo MAO che questo raggio fa con quello AO, che inizialmente era diretto secondo AD, cioè parallelamente all'asse EF del cilindro; e finalmente se si chiama $\psi$ l'angolo che il raggio vettore $r$ fa con AD, il qual angolo è pure quello che la direzione del movimento del punto M considerato nell'anello, fa con la direzione del movimento del medesimo punto M considerato sulla superficie del cilindro, sarà

$$\sin\psi = \frac{b}{r}.$$

Scomponendo quindi la velocità assoluta $r\frac{d\theta}{dt}$ del punto M dell'anello in due, l'una perpendicolare, l'altra parallela alla direzione del movimento del punto M del cilindro, la seconda, la quale sola si trasmetterà dall'anello al cilindro, risulterà

$$r\frac{d\theta}{dt}\cos\psi = r\frac{d\theta}{dt}\frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r};$$

onde serbando sempre le lettere $\rho$ e $\varphi$ per esprimere il raggio del cilindro, e l'angolo da esso descritto intorno al proprio asse, avremo

$$\rho\frac{d\varphi}{dt} = r\cos\psi\,.\,\frac{d\theta}{dt};$$

epperò la velocità angolare del cilindro starà a quella dell'anello, $:: r\cos\psi : \rho$, ossia come la proiezione AP del raggio vettore $r$, fatta sulla direzione fissa AD parallela all'asse del cilindro, sta al raggio $\rho$ di questo.

In entrambi questi meccanismi il movimento trasmettesi per solo attrito; ma quando si avesse a superare qualche resistenza, che esigesse un modo più efficace di trasmissione, questo si otterrebbe facilmente. Infatti nel meccanismo del Rœmer al pane continuo MRN si può sostituire una serie di denti disposti secondo l'andamento della curva medesima MRN, e collocati a tali distanze tra di loro, che girando i due coni, quelli possano venirsi successivamente incastrando entro a tante scanalature scolpite sulla superficie del cono condotto GHIL secondo la direzione delle generatrici di questa, o per dir meglio, possano venirsi successivamente incastrando negli intervalli lasciati vuoti tra tanti regoletti riportati sulla superficie conica secondo le sue generatrici, e di altezza tale che possano senza ostacolo passare nell'intervallo che separa le superficie dei due coni primitivi. Similmente nel meccanismo dell'Ugenio si può intagliare una dentatura nell'orlo dell'anello BDC, e scanalare la superficie del cilindro in guisa che i denti dell'anello vengano ad inserirsi nelle scanalature del cilindro. In qual modo debbano farsi queste dentature e scanalature si comprenderà quando si saranno studiati i capitoli, in cui tratteremo specialmente delle ruote dentate e della miglior conformazione dei denti di esse.

Addizione *ai* §§ 104 - 107.

Siano CME, DMF (*tav.* 9, *fig.* 13) due curve, mobili intorno ai centri A, B, le quali debbano condursi per contatto di sviluppo. Intendasi ciascuna di queste curve riferita ad un sistema di coordinate polari, prendendo per poli i rispettivi punti fissi A, B; e per linea fissa, dalla quale si misurino gli angoli, la linea dei centri AB; considerato il meccanismo in una sua determinata posizione, per esempio, in quella che si riguarda come *iniziale*, dicansi $Am = r$, $Bm' = r'$ i due raggi vettori, ed $MAm = \theta$, $MBm' = \theta'$ gli angoli corrispondenti, sicchè siano $r$ e $\theta$, $r'$ e $\theta'$ le coordinate de' due punti $m$ ed $m'$ delle due curve, che verranno in contatto tra loro, quando al pezzo A si farà descrivere l'angolo $\theta$.

Acciò il moto si trasmetta per semplice sviluppo, dovranno, secondo le cose dette nel testo,

1° Essere costante, ed eguale alla linea dei centri $AB = 2a$, la somma dei due raggi vettori $Am$, $Bm'$.

2° Essere eguali tra di loro i due archi $Mm$, $Mm'$.

3° Essere supplimentari uno dell'altro i due angoli, che le tangenti condotte alle due curve in $m$ ed $m'$ fanno co' rispettivi raggi vettori $Am$, $Bm'$.

La prima di queste condizioni è espressa dall'equazione

$$r + r' = 2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dalla quale ne segue

$$dr = -dr' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La seconda condizione sarà soddisfatta per tutte le posizioni delle due curve, se i singoli elementi $ds$ della prima saranno eguali ai corrispondenti elementi $ds'$ della seconda: ora a motivo di

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}, \quad \text{e} \quad ds' = \sqrt{dr'^2 + r'^2 d\theta'^2},$$

e della (2), affinchè sia $ds = ds'$ basterà che abbiasi

$$r\,d\theta = r'\,d\theta' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Dalle due equazioni (2) e (3) poi risulta ancora la

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = -\frac{dr'}{r'\,d\theta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

la quale significa che sarà eguale a due retti la somma degli angoli, che le tangenti in $m$, $m'$ fanno co' rispettivi raggi vettori; cioè che la terza condizione sovra enunciata è implicitamente contenuta nelle due prime e nelle equazioni (2) e (3).

Due sono i problemi generali, che possiamo proporci di risolvere per mezzo di queste equazioni, cioè:

1° Dati i due centri A, B, e data una delle due curve, può domandarsi di determinar l'altra in guisa che la comunicazione del movimento si faccia per semplice sviluppo; e di trovare la legge con cui varierà da una posizione all'altra delle due curve la ragione delle loro velocità angolari.

2° Dati i due centri A, B, e la legge con cui si vuole che vada variando la ragione delle velocità angolari, determinare la figura di entrambe le curve.

*Problema* 1°. Sia $r = f(\theta)$ ..............................(5)

l'equazione della data curva A. Per mezzo di questa equazione e della

$$r + r' = 2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

si eliminino $r$ e $\theta$ dalla $r\,d\theta = r'd\theta'$ ..............................(2)

e si otterrà la equazione differenziale della curva domandata, la quale dovrà integrarsi determinando la costante in modo che siano insieme $\theta = o$, $\theta' = o$.

Quanto alla ragione delle velocità angolari $\omega$, $\omega'$ delle due curve, sarà sempre

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r} = \frac{2a - r}{r} = \frac{2a - f(\theta)}{f(\theta)}\ .$$

Per 1° esempio sia data la spirale logaritmica

$$r = ae^{\alpha\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

la quale taglia per mezzo la linea dei centri $2a$, poichè posto $\theta = o$, viene $r = a$. Differenziando ne viene

$$dr = ae^{\alpha\theta} \cdot \alpha d\theta = r\alpha d\theta\ ;$$

epperò

$$r'd\theta' = r\,d\theta = \frac{dr}{\alpha} = -\frac{dr'}{\alpha}\ ;$$

ossia

$$-\alpha d\theta' = \frac{dr'}{r'}\ ;$$

onde, integrando in modo che $\theta' = o$ dia $r' = a$,

$$r' = ae^{-\alpha\theta'},$$

equazione di una spirale logaritmica eguale a quella data dalla equazione (5), ma volta a ritroso.

Dalla equazione $r+r'=2a$ risulta ancora, che la relazione tra gli angoli $\theta$, $\theta'$ contemporaneamente descritti dalle due curve sarà

$$e^{\alpha\theta}+e^{-\alpha\theta'}=2\,,$$

e le ragione delle velocità angolari avrà per espressione

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{2-e^{\alpha\theta}}{e^{\alpha\theta}}=2e^{-\alpha\theta}-1\ .$$

Sia per secondo esempio la ellisse data dall'equazione

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

per cui il *polo* sarà nel foco più vicino al punto di contatto.

Da questa equazione, e dalle (1) e (2) si avrà

$$d\theta'=\frac{r\,d\theta}{2a-r}=\frac{(1-e^2)\,d\theta}{1+2e\cos\theta+e^2}\ ;$$

ed integrando $$\cos\theta'=\frac{2e+(1+e^2)\cos\theta}{(1+e^2)+2e\cos\theta}\ ;$$

oppure $$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta'=\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta\ .$$

E dalla prima di queste relazioni, ponendovi per $\cos\theta$ il suo valore tratto dalla (5), e $2a-r'$ in luogo di $r$; viene

$$r'=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta'}\ ;$$

cioè l'equazione di una ellisse eguale alla (5), ma riferita, come a suo polo, al foco più lontano dal suo punto di contatto con la ellisse data.

Quanto alla ragione delle due velocità angolari, essa sarà

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{r}{r'}=\frac{r}{2a-r}=\frac{1-e^2}{1+2e\cos\theta+e^2}\ .$$

In questi due esempli, che son pur quelli indicati nel testo, le due curve compagne sono eguali tra di loro; ma così non avviene nel caso seguente.

Vogliasi che una delle curve sia la spirale d'Archimede

$$r = a + \frac{b\theta}{2\pi}$$

onde

$$d\theta = \frac{2\pi}{b} \,.\, dr = -\frac{2\pi}{b} dr' \;;$$

e per conseguenza

$$d\theta' = \frac{2a - r'}{r'} d\theta = \frac{2\pi}{b}\left(1 - \frac{2a}{r'}\right) dr' \;;$$

ed integrando in modo che $\theta' = o$ corrisponda ad $r' = a$

$$\theta' = \frac{2\pi}{b}\left(r' - a + 2a \log \frac{a}{r'}\right) \;;$$

che sarà l'equazione della curva cercata, ed assai facile a costruirsi per mezzo della data spirale d'Archimede, e della spirale logaritmica

$$r'' = a e^{-\frac{b\theta''}{4\pi a}} .$$

Sarà poi la ragione delle velocità angolari

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{2\pi a + b\theta}{2\pi a - b\theta} .$$

*Problema* 2°.

Proponendosi di costruire due curve atte a trasmettersi il moto per isviluppo, e tali, che girando la prima equabilmente, la seconda si muova con velocità variabile secondo una data legge, ciò viene a dire che la velocità della seconda curva è data in funzione dell'angolo descritto dalla prima, od ancora che si conosce la relazione che passa tra gli angoli contemporaneamente descritti dalle due curve, partendo da una data posizione di esse. Sia dunque

$$\theta' = \mathrm{F}(\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

questa relazione; ne verrà

$$d\theta' = \mathrm{F}'(\theta)\, d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

E siccome per la natura stessa della quistione dee essere

$$\frac{d\theta'}{d\theta}=\frac{r}{r'} \quad \text{ed} \quad r+r'=2a\ ;$$

si avrà subito per la prima curva

$$\frac{r}{2a-r}=\mathrm{F}'(\theta) \quad \text{ossia} \quad r=2a\ .\ \frac{\mathrm{F}'(\theta)}{1+\mathrm{F}'(\theta)}\ ,$$

e per la seconda

$$\frac{2a-r'}{r'}=\mathrm{F}'(\theta) \quad \text{ossia} \quad r'=\frac{2a}{1+\mathrm{F}'(\theta)}\ ;$$

dalla quale si dovrà eliminar $\theta$ per mezzo della equazione (6).

Proponiamoci per esempio di trovare due curve tali, che la relazione tra gli angoli $\theta$ e $\theta'$ da esse contemporaneamente descritti venga espressa dalla relazione.

$$\operatorname{tang}\frac{m'\theta'}{2}=\alpha\operatorname{tang}\frac{m\theta}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6'),$$

essendo $m$, $m'$ due numeri interi dati, ed $\alpha$ un numero qualunque intiero o frazionario pure dato.

Differenziando la (6') se ne ottiene

$$d\theta'=\frac{m}{m'}\alpha\ .\ \frac{d\theta\ .\ \cos^2\frac{m'\theta'}{2}}{\cos^2\frac{m\theta}{2}}$$

ed eliminandone l'angolo $\frac{m'\theta'}{2}$ per mezzo della (6')

$$\frac{d\theta'}{d\theta}=\frac{m\alpha}{m'}\ .\ \frac{1}{\cos^2\frac{m\theta}{2}+\alpha^2\sin^2\frac{m\theta}{2}}=\frac{r}{2a-r}$$

a motivo di $\qquad \dfrac{d\theta'}{d\theta}=\dfrac{r}{r'}=\dfrac{r}{2\alpha-r}\ ;$

e quindi con facili trasformazioni

$$r=\frac{4\alpha m\ .\ a}{2\alpha m+m'(1+\alpha^2)+m'(1-\alpha^2)\cos m\theta}\ ;$$

e nello stesso modo

$$r' = \frac{4\alpha m' a}{2\alpha m' + m(1+\alpha^2) - m(1-\alpha^2)\cos m'\theta'} ;$$

le quali due equazioni appartengono a due curve l'una di $m$ lobi, l'altra di $m'$ lobi, di cui i raggi massimi e minimi sono, per la prima

$$\frac{2ma}{m+\alpha m'} \quad \text{e} \quad \frac{2\alpha . m\alpha}{m'+\alpha m} ,$$

e per la seconda

$$\frac{2\alpha m' a}{m+\alpha m'} \quad \text{e} \quad \frac{2m' a}{m'+\alpha m} .$$

Queste due curve si costruiscono in modo analogo a quello insegnato nel testo per mezzo delle ellissi, nelle quali le distanze di uno de' fochi dai due apsidi, sono quelle medesime ora scritte, ossia nelle quali le eccentricità $e$, $e'$ ed i semi-assi maggiori A, A$'$ sono

$$e = \frac{m'(1-\alpha^2)}{2\alpha m + m'(1+\alpha^2)} , \qquad e' = \frac{m(1-\alpha^2)}{2\alpha m' + m(1+\alpha^2)} ;$$

$$\text{A} = \frac{2\alpha m + (1+\alpha^2)m'}{(m+\alpha m')(m'+\alpha m)}\, ma , \qquad \text{A}' = \frac{2\alpha m' + (1+\alpha^2)m}{(m+\alpha m')(m'+\alpha m)}\, m'a .$$

Tutte queste formule si fanno molto più semplici quando le due ruote deggiono avere il medesimo numero di lobi; poichè facendo $m = m'$, le equazioni delle due curve divengono

$$r = \frac{4a\alpha}{(1+\alpha)^2 + (1-\alpha^2)\cos m\theta} , \qquad r' = \frac{4a\alpha}{(1+\alpha)^2 - (1-\alpha^2)\cos m\theta}$$

che si costruiscono mercè della ellisse, la cui eccentricità è

$$e = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

ed il semi-asse maggiore $= a$ .

La costruzione, che risulta da questi nostri calcoli per due curve di un diverso numero di lobi, le quali debbano condursi a vicenda, coincide con quella che è stata esposta nell'ultimo alinea del § 114, e che è dovuta al rev. sig. Holdisch, (citato nell'opera del sig. Willis) col porre

$$\frac{mm'(1-\alpha^2)a}{(m+\alpha m')(m'+\alpha m)}=h\,, \qquad \frac{4\alpha a^2}{(m+\alpha m')(m'+\alpha m)}=k^2$$

rappresentando $h$ il raggio del circolo ausiliare (*tav.* 10, *fig.* 9), e $k$ una delle parti eguali PQ, QR, RS.....

Le equazioni delle due curve divengono allora

$$r=\frac{m^2k^2}{\sqrt{m^2k^2+h^2}+h\cos m\theta}\,, \qquad r'=\frac{m'^2k^2}{\sqrt{m'^2k^2+h^2}-h\cos m'\theta'}\,;$$

le quali si costruiscono mercè delle ellissi, per le quali gli assi maggiori sono

$$2\sqrt{m^2k^2+h^2}\,, \qquad \text{e} \qquad 2\sqrt{m'^2k^2+h^2}\,;$$

e la distanza de' fochi dal centro è per ambe le curve eguale ad $h$.

La relazione tra gli angoli $\theta$ e $\theta'$ prende allora la forma

$$\operatorname{tang}\frac{m'\theta'}{2}=\frac{m}{m'}\times\frac{\sqrt{m^2k^2+h^2}-h}{\sqrt{m^2k^2+h^2}+h}\operatorname{tang}\frac{m\theta}{2}\,.$$

Aggiungiamo ancora un esempio, che è suscettivo di utili applicazioni.

Vogliansi due curve tali, che, mentre la prima descrive con moto equabile l'angolo $\frac{\pi}{m}$, la seconda descriva l'angolo $\frac{\pi}{m'}$ con moto equabilmente accelerato, onde debba essere

$$\theta'=\alpha\theta+\beta\theta^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(6)\,,$$

rappresentando $\alpha$ e $\beta$ due costanti, tra le quali dovrà passare la relazione

$$\frac{\pi}{m'}=\left(\alpha+\beta\frac{\pi}{m}\right)\frac{\pi}{m}\,, \qquad \text{ossia} \qquad \beta\pi=m\left(\frac{m}{m'}-\alpha\right) \;\ldots\ldots\;(7)\,.$$

Applicando qui le formule generali, avremo dunque

$$r=2a\frac{\alpha+2\beta\theta}{1+\alpha+2\beta\theta}\;;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\text{A})$$

$$r' = 2a \frac{1}{1+\alpha+2\beta\theta} = 2a \frac{1}{1+\sqrt{\alpha^2+4\beta\theta'}} \quad ; \ldots\ldots\ldots (B)$$

che saranno le equazioni delle due curve domandate, e dalle quali dovrà eliminarsi $\alpha$ oppure $\beta$ per mezzo della relazione sovra trovata.

Fingansi ora costruite le due curve, cioè la (A) da $\theta = o$ fino $\theta = \frac{\pi}{m}$; la (B) da $\theta' = o$ fino a $\theta' = \frac{\pi}{m'}$. Facendo girar equabilmente la prima curva pel verso de' valori crescenti di $r$, essa communicherà alla seconda un moto equabilmente accelerato: e facendola girare pel verso contrario, anche equabilmente, acciò la seconda curva (B) si mantenga ad essa sempre tangente, sarà manifestamente necessario, che essa ripassi per le medesime posizioni, e riprenda le medesime velocità che avea ricevute nel moto diretto: da ciò si deduce il modo di costruire due ruote l'una di $m$, l'altra di $m'$ lobi, e tali che girando la prima equabilmente e sempre per lo stesso verso, la seconda si muova con moto alternativamente accelerato e ritardato, descrivendo in ciascuna vicenda di accelerazione e di ritardamento l'angolo $\frac{\pi}{m'}$.

Dividasi la linea dei centri $AB = 2a$ in due parti AC, CB che stiano tra di loro nella ragione di $\alpha:1$; e descritte coi raggi AC, CB le due circonferenze CEG, CE'G'I', si divida la prima in $2m$ parti eguali CD, DE, EF....; la seconda in $2m'$ parti eguali CD', D'E', E'F'....; negli angoli CAD, CBD' si descrivano per mezzo delle equazioni (A), (B) le due curve CL, CL'. Ripetendo poi ciascuno di questi archi, volto alternativamente da una parte e dall'altra, tante volte quanti sono i mezzi lobi di ognuna delle due ruote rispettivamente, si avranno i contorni delle due curve domandate.

Nella *fig.* 11, *tav.* 10 la ruota conduttrice è di tre lobi, la ruota condotta di quattro; e si è assunto il valore $\alpha = 0,45$, onde risulta $\beta = \frac{0,9}{\pi}$; nella *fig.* 10 al contrario la ruota conduttrice ha quattro lobi, e la ruota condotta ne ha tre; la costante $\alpha$ si è supposta eguale all'unità, e per conseguenza $\beta = \frac{4}{3\pi}$.

È appena necessario il rammentare, che nella pratica sarà necessario armare di denti i perimetri de' mezzi-lobi che sono in azione ne' periodi, ne' quali il movimento delle ruote condotte dee essere equabilmente ritardato.

## CAPITOLO DICIASETTESIMO

### DEI CINGOLI.

116. La trasmissione del movimento per immediato contatto di sviluppo fra le circonferenze di due ruote circolari, o fra le superficie di due coni retti diviene impraticabile in due casi, cioè:

1° Quando dee trasmettersi il movimento tra due assi molto discosti tra loro, come avviene sovente in molte manifatture.

2° Quando si ha da vincere una resistenza molto considerevole.

Nel primo caso il contatto non potrebbe ottenersi senza impiegar ruote di smisurata grandezza, o senza frapporre tra le ruote estreme un gran numero di ruote oziose; nel secondo caso il semplice attrito non sarebbe bastante alla trasmissione del movimento. In tutti i casi poi l'uso delle ruote a contatto, quali le abbiamo finora descritte, suppone ch'esse sieno di figura perfettamente regolare, la quale regolarità perfetta oltre all'essere difficilissima ad ottenersi, non si può poi a lungo mantenere. Egli è evidente infatti, che a forza di premersi e di soffregarsi a vicenda le ruote debbono alla lunga logorarsi; e che per poco che siano differenti da un punto all'altro delle superficie che vengono a contatto, la durezza e tenacità loro, esse si logoreranno in un punto più e nell'altro meno, e quindi combaciando ora meno ora più strettamente tra loro, la comunicazione del moto ne diverrà irregolare ed incerta.

A questi sconci i meccanici si sono argomentati di riparare per mezzo di diversi ripieghi che dobbiam ora far conoscere, cominciando a trattare nel capitolo presente dell'uso dei cingoli o *baltei* per la trasmissione del moto tra assi paralleli o non paralleli, e sia che la ragione delle velocità angolari debba essere costante, sia che debba variare da una posizione all'altra del meccanismo.

Consideriamo in primo luogo le due carrucole o puleggie della *fig.* 6, *tav.* 2, collocate nel medesimo piano e co' loro assi paralleli, e supponiamo che alle loro circonferenze siasi circondata una *corda senza capi*, o *corda impiombata*, cioè una corda di cui si sieno insieme riuniti i due capi, in modo da formarne come un anello flessibile; supponiamo di più che questa corda sia sufficientemente tesa, ond'essa abbracci e stringa le circonferenze delle due puleggie con tal forza, che l'attrito le vieti di scorrere sulle circonferenze medesime (1).

(1) L'attrito essendo una forza, la misura de' suoi effetti appartiene alla *Meccanica*, non alla *Cinematica:* noi dobbiam quindi limitarci a dir qui, per la intelligenza delle cose esposte nel testo, che quando due ruote si trasmettono direttamente il moto per isviluppo, la resistenza che provano a strisciare l'una sull'altra, ed in virtù della quale solamente si trasmettono il movimento, è proporzionale alla scambievole pressione; la quale per conseguenza dovrà essere tanto maggiore, quanto più grande è lo sforzo che la ruota condotta dee esercitare. Quando all'incontro il movimento si tramanda da una puleggia all'altra per via di un cingolo o balteo circondotto alle loro periferie, la resistenza che si oppone allo scorrimento del cingolo, dipende bensì dalla tensione di esse, ma dipende eziandio dall'ampiezza dell'arco abbracciato dal cingolo sovra ciascuna circonferenza, ossia dal numero dei gradi contenuto in quest'arco. Ne segue, che nel contatto immediato di due ruote non si può accrescere la loro *aderenza*, che con lo accrescere la loro scambievole pressione, la quale, è chiaro non potersi aumentare oltre a certi limiti: mentre al contrario nella trasmissione del movimento per mezzo di cingolo si accrescerà l'aderenza, sia coll'accrescerne la tensione, sia col fare ch'esso abbracci sulle puleggie archi di ampiezza maggiore.

A ciò si aggiunga che per la regolarità del movimento nella trasmissione immediata è indispensabile, che le due ruote siano perfettamente circolari: mentre la elasticità del cingolo rende insensibile l'effetto delle piccole imperfezioni delle circonferenze delle puleggie.

Allora se noi faremo girare una delle due puleggie, essa strascinerà nel suo movimento la corda, e questa comunicherà il movimento all'altra puleggia. È chiaro di più che la lunghezza della corda essendo invariabile, quanta se ne sviluppa da una delle due puleggie, tanta se ne va ad avvilupparsi sull'altra; e siccome non vi è scorrimento della corda sulle due circonferenze, gli archi descritti da queste nello stesso tempo sono sempre eguali tra loro, sicchè le due circonferenze hanno eguali velocità assolute, precisamente come se esse si conducessero per contatto immediato. Le velocità angolari sono dunque inversamente proporzionali alle circonferenze delle due puleggie od ai loro diametri; cioè il numero dei giri fatti dall'una sta al numero dei giri fatti nello stesso tempo dall'altra, come il diametro della seconda sta al diametro della prima.

Con la disposizione rappresentata nella *fig.* 6 è facile di vedere che, se le due puleggie hanno lo stesso diametro, gli archi abbracciati dalla corda sulle due circonferenze sono eguali e che ciascuno di essi comprende un'ampiezza di 180°; poichè i due tratti rettilinei della corda sono paralleli tra loro. Ma se le puleggie sono disuguali, l'arco abbracciato dalla corda sulla puleggia più grande è maggiore d'una mezza circonferenza, mentre al contrario l'arco abbracciato sulla puleggia più piccola è minore di una mezza circonferenza, e un po' di riflessione basterà a far vedere che la somma di questi due archi è sempre di 360 gradi.

Ma se invece di disporre la corda in modo che i due tratti rettilinei sieno tangenti *esternamente* alle due circonferenze, come nella *fig.* 6, noi faremo che questi tratti incrociandosi tra le puleggie, come nella *fig.* 7, seguano l'andamento delle tangenti *interne*, allora gli archi abbracciati dalla corda sulle due puleggie saranno dello stesso numero di gradi, ed entrambi maggiori della mezza circonferenza, epperò la loro somma eccederà i 360 gradi e sarà tanto più grande, quanto le puleggie saranno più grandi e più vicine. Con questa seconda disposizione adunque il contatto tra la corda e le puleggie essendo più esteso che con l'altra, la corda proverà più difficoltà a scorrere, a strisciare, e il moto si trasmetterà in maniera più sicura e più regolare.

Vi ha ancora tra gli effetti di queste due disposizioni un'altra notabile differenza, ed è, che con quella della *fig.* 6 le due puleggie girano per lo stesso verso, mentre con la disposizione della *fig.* 7 esse prendono rotazioni contrarie; cioè in questo secondo caso le direzioni dei loro movimenti sono le stesse come se le due circonferenze si menassero per contatto immediato, mentre nel primo caso queste direzioni sono le medesime come se il moto si tramandasse da una puleggia all'altra per via di una terza rotella oziosa I, a contatto con entrambe.

117. Sull'asse A*a* (*tav.* 11, *fig.* 3) sieno inalberate le puleggie di raggi crescenti E, F, G, e sull'asse parallelo B*b* le puleggie di raggi decrescenti *e*, *f*, *g*, in modo che ciascuna delle puleggie della seconda serie sia nello stesso piano con quella che porta la medesima lettera nella prima, cioè *e* con E, *f* con F e *g* con G. Il movimento potrà allora trasmettersi dal primo al secondo asse ravvolgendo una corda intorno ad una qualunque di queste tre coppie di puleggie; e siccome la ragione dei raggi E, *e* è differente da quella dei raggi F, *f*, e da quella dei raggi G, *g*, sarà pur differente nei tre casi la ragione delle velocità angolari. Fingiamo per esempio, che i raggi delle puleggie E, F, G sieno di 10, di 15 e di 20 centimetri, e quelle delle puleggie compagne *e*, *f*, *g*, di 20, di 15 e di 10. Allora se il moto si trasmetterà per mezzo della coppia E, *e*, mentre E farà due giri, *e* ne farà un solo: ma se la comunicazione avrà luogo per la coppia F, *f*, il numero de' giri sarà lo stesso intorno ai due assi; e se avrà luogo per la terza coppia G, *g*, ad ogni giro fatto intorno all'asse A*a* corrisponderanno due giri intorno all'asse B*b*.

Potrem dunque così ottenere tre differenti ragioni di velocità, senz'altro cangiamento che quello di trasportar la corda da una coppia di puleggie all'altra. Ma acciocchè questo trasporto si faccia in modo comodo e spedito, è necessario che la stessa lunghezza di corda si affaccia a tutte le coppie, cioè che non occorra allentarla, nè tenderla nel passare da una coppia ad un'altra; la qual cosa veramente succederà, purchè:

1° La corda si disponga sempre secondo le tangenti interne, cioè incrociandola come nella *fig.* 7 della *tav.* 2.

2° La somma dei raggi delle puleggie sia la medesima in tutte le coppie, come avverrebbe nell'esempio addotto testè, nel quale la somma dei raggi in tutte e tre le coppie è di 30 centimetri.

Supponiamo infatti che la corda circondi da prima le due puleggie EHE′, *ehe′* (*tav.* 11, *fig.* 3) prendendo la disposizione EHE′*e′he*, e che essa si voglia trasportare sulle puleggie seguenti FIF′, *fif′* disponendola in FIF′*f′if;* nella prima posizione la metà della lunghezza della corda sarà dunque eguale alla somma dei due archi HE, *he* e del tratto rettilineo E*e*; e nella seconda la mezza lunghezza della corda sarà eguale alla somma dei due archi IF, *if* e del tratto rettilineo F*f*. Ora, dico che queste due somme saranno eguali, purchè la differenza EF dei raggi AE, AF delle due puleggie superiori sia eguale alla differenza *ef* dei raggi B*e*, B*f* delle due puleggie inferiori, oppure, ciò che torna allo stesso, purchè la somma dei raggi AE, B*e* delle puleggie della prima coppia, sia eguale alla somma dei raggi AF, B*f* di quelle della seconda.

Infatti per essere EF eguale ad. *ef*, i tratti rettilinei E*e*, F*f* sono paralleli ed eguali, e gli archi EH, *eh*, i quali, come abbiam veduto, sono dello stesso numero di gradi, contengon pure lo stesso numero di gradi che gli archi FI, *fi*, epperò la differenza fra le lunghezze assolute degli archi EH, FI, è eguale alla differenza tra le lunghezze assolute degli archi *eh*, *fi*, od in altre parole, quanto l'arco EH è più lungo dell'arco FI, altrettanto l'arco *eh* è più corto dell'arco *fi*. La somma dei due primi archi è dunque eguale alla somma dei due secondi, e per conseguenza facendo passare la corda della coppia AE; B*e* alla coppia AF, B*f*, non varia nè la lunghezza dei tratti rettilinei, nè quella della somma degli archi abbracciati sulle puleggie; non varia dunque neppure la lunghezza totale del cingolo.

118. Se le velocità angolari di due puleggie unite con una corda senza capi dovessero stare tra loro in una ragione molto grande, se una delle puleggie dovesse, per esempio, fare centocinquanta giri mentre l'altra fa un giro solo, i raggi dovendo stare nella ragione inversa di queste velocità, quello della seconda puleggia riuscirebbe centocinquanta volte maggiore di quello della prima, e l'uso loro sarebbe incomodo od anche impraticabile. Si rimedia a questo inconveniente impiegando più di due puleggie accoppiate come si vede nella *tav.* 11, *fig.* 8, cioè in modo perfettamente analogo a quello che abbiam descritto parlando delle ruote a contatto e che è rappresentato nella *tav.* 8, *fig.* 17. Tutta la differenza sta in ciò che le ruote conduttrici A, B, C, invece di toccare immediatamente le ruote condotte *b*, *c*, *d*, trasmettono ad esse il movimento per via di corde senza capi; ma la ragione delle velocità angolari di due ruote consecutive è precisamente la medesima in entrambi i meccanismi, e per conseguenza le regole insegnate per l'uno valgono egualmente per l'altro, onde sarà sempre facile, data la ragione delle velocità delle due puleggie estreme A, *d*, ed il numero totale degli assi, di trovar per tutte le puleggie diametri convenienti.

119. Finquì, per semplificare l'espressione di ciò che io aveva a dire, ho sempre parlato di corde; ma le corde o funi di canapa non sono certamente il miglior cingolo che si possa adoperare. Esse infatti assai presto si logorano, sono soggette a rallentarsi ne' tempi asciutti, ad accorciarsi

nei tempi umidi, e quando lo sforzo che si ha da trasmettere è molto considerevole, dovendo esse allora avere un diametro notabile, riescono molto rigide, si adattan male alla circonferenza delle puleggie, alterano sensibilmente la ragione dei loro raggi, cagionano un inutile dispendio di forza, e trasmettono il movimento in modo irregolare. Quindi è che alle funi si è cercato sovente di sostituire catene di varia forma, quali sono, per esempio, quelle rappresentate nella *tav.* 10, *fig.* 12. Fra queste diverse forme convien far scelta di quelle che ad una bastante robustezza uniscono una flessibilità più perfetta, i cui anelli sono meno soggetti a scomporsi e a contorcersi, e che più esattamente si applicano sulla superficie delle puleggie. La catenella rappresentata di fronte e di fianco alla lettera G, è quella di cui si fa uso nella costruzione degli orologi da tasca; essa non è composta di anelli, ma di piastrette piane che formano tanti articoli uniti a snodo per mezzo di trafitte; analoghe a queste sono le catene *articolate* che si veggono nelle *figg.* 19 e 20. Un'altra catena ancora ch'è frequentemente usata in molti meccanismi trovasi rappresentata sotto due aspetti alla lettera H (*fig.* 12); essa porta il nome del suo inventore, del celebre Vaucanson (1), che anche immaginò una macchina per la fabbricazione di essa. Usansi pur talora per trasmettere il movimento a notabili distanze grosse catene articolate di legno.

Il più delle volte però alle corde ed alle catene si debbono preferire le treccie, le cinghie e meglio ancora le coreggie, perchè, a forza eguale, esse sono molto men rigide che le corde, molto meno pesanti che le catene. Una coreggia infatti potendo facilmente farsi di larghezza grande, come a dire

(1) Giacomo di Vaucanson, nato a Grenoble nel 1709, morto a Parigi nel 1782, è celebre per l'invenzione e la costruzione di molti ingegnosissimi automi, fra i quali basterà citare l'anitra che poco fa si facea vedere in Torino; più degni ancor di memoria che i suoi automi sono i miglioramenti da lui introdotti nel filatoio da seta.

di venticinque o trenta centimetri, non ha bisogno di molta spessezza per resistere a sforzi anche considerevolissimi, e riuscendo così molto flessibile si adatta perfettamente sulle puleggie, aderisce con molta forza sulle loro superficie, non va per conseguenza soggetta a strisciare sulle medesime, e trasmette il movimento in modo dolce, eguale, non rumoroso, e perfettamente adatto a' bisogni di molte manifatture, e particolarmente di quelle in cui si filano e si tessono, per via di macchine, la seta, la lana, il lino, la canapa od il cotone.

Egli ben s'intende da sè che, secondo la varia natura del cingolo, converrà pure che varii la forma della puleggia. Così le carrucole di gola concava, o conica (*figg.* 13 e 14) convengono per le corde rotonde: ma per le cinghie e per le coreggie si debbono impiegare carrucole di gola cilindrica come quella della *fig.* 15, o meglio (per la ragione che tosto vedremo) puleggie con la superficie leggermente rigonfia come si vede nella *fig.* 16. Le carrucole armate di piuoli sporgenti, uniformemente distribuiti sulla loro circonferenza (*fig.* 17) sono adattate all'uso delle catene A, B, C, D, E (*fig.* 12); ma alla catena di Vaucanson meglio si affarebbe la carrucola dentata (*fig.* 18). Finalmente per accrescere l'aderenza delle catene articolate sulle girelle e sui tamburi sui quali esse si vengono ad inviluppare, si possono armar di denti gli articoli stessi della catena, e allora la puleggia porta intorno tante *tacche* (*fig.* 19) nelle quali i denti si vengono di mano in mano ad allogare. Oppure si possono armar di denti i due fianchi della puleggia, in modo che questi denti entrando tra articolo e articolo della catena (*fig.* 20) impediscano ch'essa possa scorrere sulla circonferenza della puleggia.

120. Ho detto or ora, che alle cinghie ed alle coreggie convengon meglio le puleggie rigonfie sul mezzo (*fig.* 16), che le puleggie piatte con gli orli rilevati (*fig.* 15); l'esperienza infatti ha insegnato, che vi ha meno pericolo con quelle che con queste di veder la coreggia o la cinghia

scappare a destra o a sinistra dalla carrucola, o come dicono *scarrucolare* o *scavalcare*. Ciò può parere strano, e tuttavia si rende ragione del fatto in modo soddisfacente; ma è necessario per ciò prendere le cose un po' da lontano.

Quando la superficie di un tamburo cilindrico ABCD, (*tav.* 11, *fig.* 4) è abbracciata da un cingolo qualunque EFG, se questo si trova disposto in un piano perpendicolare all'asse del tamburo, tutto è perfettamente simmetrico a destra e a sinistra di questo piano, e comunque si faccia girare il cilindro, il cingolo non ha veruna tendenza ad uscire dal piano medesimo ed a cangiar luogo sulla superficie del cilindro. Supponiamo che questo giri pel verso indicato dalla saetta S: allora tutti i punti del tratto EF del cingolo si muoveranno verso il tamburo, cioè si verranno a questo avvicinando; mentre all'incontro tutti i punti dell'altro tratto FG si allontaneranno continuamente da esso: per brevità di discorsi noi chiameremo *tratto che viene* il primo tratto EF, che si avvicina al tamburo; e *tratto che va* l'altro tratto FG, che si scosta da esso. Ora è fatto costante, che se con la mano od altrimenti il tratto che viene si farà uscire dal piano perpendicolare all'asse del cilindro, conducendolo per esempio nella posizione rappresentata in E*ci*F, tosto il cingolo comincierà a spostarsi sulla superficie del cilindro, muovendosi da sinistra a destra, e ch'esso si accosterà così sempre più alla base BD del cilindro; ond'è che dopo pochi istanti esso potrà anche scarrucolare, cioè cader fuori del cilindro medesimo. La qual cosa di leggieri si comprende dover di necessità avvenire, chi ponga mente che il cingolo non potendo, a motivo dell'attrito, sdrucciolare lungo il tamburo, il suo punto *i* nel girar di questo si troverà trasportato in *f* alla destra di F, descrivendo l'arco *if* contenuto in un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Ma se il tamburo, invece di girare pel verso della saetta S, girasse pel verso contrario, cosicchè fosse allora GF il *tratto che viene*, ed FE il *tratto che va*, quest' ultimo tratto potrebbe benissimo venir deviato nella posizione F*ie*E, senza che perciò il cingolo ne provasse veruna tendenza a trasportarsi da una parte o dall'altra sulla superficie del tamburo, poichè nella rotazione di questo i successivi punti del cingolo arriverebbero sempre sopra di esso nel piano primitivo G*h*F perpendicolare all'asse.

Ogni deviazione adunque del tratto che viene produce un trasporto del cingolo sul tamburo, e può cagionarne lo scarrucolamento; ma una deviazione anche considerabile del tratto che va, non vale ad ispostare il cingolo sulla superficie del tamburo; la quale osservazione sarà utilissima tutte le volte che occorrerà di spostare un cingolo sopra una puleggia, o di farlo passare da una puleggia all'altra.

Supponiamo adesso che il tamburo sia fatto a guisa non più di cilindro, ma bensì di cono tronco, come nella *fig.* 5; è manifesto che allora, per poco che il cingolo sia teso, i suoi lembi più non potranno starsene ciascuno tutto in un piano perpendicolare all'asse, ma il cingolo si disporrà come vedesi rappresentato nella figura citata; cioè la parte *i*F, che si applica sulla superficie del cono, piegherà verso la base minore di esso. Girando adunque il cono pel verso della saetta S, il punto *i* del tratto che viene si troverà trasportato da *i* in *f* alla destra di F, epperò il cingolo passerà nella posizione *ef*, ed avanzandosi continuamente tenderà a scarrucolare non già dalla parte della base minore AC del cono, come forse si sarebbe creduto a prima vista, ma bensì dalla parte opposta, cioè verso la base maggiore BD: la qual cosa è confermata dalla sperienza.

Da ciò si comprende finalmente, che se una coreggia EF (*fig.* 6) s'invilupperà sulla superficie di una puleggia formata di due coni tronchi che combacino per le loro basi minori, per poco che la coreggia si trovi fuori del piano di mezzo, verso destra per esempio, essa tenderà a scavalcare, allontanandosi sempre più da questo piano ed avvicinandosi alla base maggiore CD. Ma all'incontro, se la puleggia sarà formata di due coni tronchi che combacino per le loro basi maggiori (*fig.* 7), allorchè la coreggia si troverà per qualsivoglia motivo fuori del mezzo, invece di scarrucolare, essa sarà continuamente ricondotta verso la base maggiore ML, cioè verso il piano di mezzo della girella; e da ciò si dee concludere che veramente le puleggie rigonfie nel mezzo (*tav.* 10, *fig.* 16) sono di uso molto migliore, che le puleggie a gola (*fig.* 13), o ad orli rilevati (*fig.* 15), e molto più efficacemente impediscono lo scarrucolamento delle coreggie.

Abbiam fatto notare poco fa doversi anteporre quella disposizione del cingolo, nella quale i due tratti di esso, incrociandosi tra le puleggie seguono l'andamento delle tangenti interne (*tav.* 2, *fig.* 7). Questa disposizione non presenta veruna difficoltà quando il cingolo è una corda di poco diametro; ma con larghe cinghie o coreggie potrebbe nascerne tra i due tratti che camminano con direzioni contrarie un forte fregamento, e l'obliquità cagionata del loro incontro, potrebbe eziandio dar pericolo di scavalcamento. Si antivengono questi danni col fare l'incrociatura come vedesi disegnata nella *fig.* 9, *tav.* 11, cioè in modo che la coreggia applichi la medesima faccia sopra entrambe le puleggie, torcendosi di un mezzo giro tra l'una e l'altra; risulta infatti da questa disposizione, che nel luogo della incrociatura i due tratti, nonchè incontrarsi di costa, voltano l'uno verso l'altro le loro faccie piane, epperò non fanno fregamento alcuno o pochissimo.

121. Quando la comunicazione del movimento tra due assi paralleli non dee continuarsi indefinitamente per lo stesso verso, ma farsi ora per un verso ora pel verso contrario, allora i due capi del cingolo, invece di rannodarsi insieme, possono fermarsi sulle superficie dei due tamburi o delle due puleggie. Così nella *fig.* 21 della *tav.* 10 il moto si trasmette dal cilindro o tamburo AC al cilindro o tamburo BD per via di

una corda E$ab$F, di cui un capo è fermato in E al primo cilindro, e l'altro in F al secondo; e quando tutta questa corda è venuta a raccogliersi sul cilindro AC, se questo si fa girare pel verso contrario, la comunicazione del moto si fa per mezzo dell'altra corda *ecdf*, di cui un capo *e* è fermato sul cilindro conduttore, e l'altro *f* sul cilindro condotto.

Lo stesso si dirà del meccanismo della *fig.* 22, nel quale la rotazione alternativa del cilindro AC produce un moto rettilineo alternativo nel carretto ossia nella *zattera* BD: è questa infatti, come ben si vede, una semplice modificazione del meccanismo della *fig.* 21.

Egli è essenziale per la equabilità del movimento che la corda di mano in mano che si raccoglie sopra un cilindro non si accavalli sui giri precedenti della corda medesima, ma formi sempre nuove spire che si dispongano le une accanto alle altre, formando una elica regolare; per ottenere questo effetto in modo più certo, il cilindro può scolpirsi a guisa di vite, che abbia tante spire quanti sono i giri di corda ch'esso dee ricevere. Così nella *fig.* 23 i due cilindri AC, BD hanno entrambi forma di viti; e siccome la stessa corda dee alternativamente raccogliersi sull'una e sull'altra vite, le lunghezze delle due eliche debbono essere eguali, e per conseguenza, i numeri delle loro spire debbono essere inversamente proporzionali ai diametri dei due cilindri; che è quanto dire, che i *passi* delle due viti si debbon fare direttamente proporzionali a questi diametri.

122. Se gli assi A$a$, B$b$ di due carrucole C, D (*tav.* 11, *fig.* 10) non sono nello stesso piano, il moto potrà tuttavia trasmettersi dall'una all'altra per via di un cingolo *mpnq*, senza pericolo di scarrucolamento, purchè il tratto *np* che viene alla carrucola C sia nel piano di questa carrucola, e similmente il tratto *mq* che viene alla carrucola D sia nel piano di questa; la qual condizione sarà prossimamente adempiuta, se le circonferenze delle due carrucole saranno entrambe tangenti alla

comune intersezione *mn* dei loro piani. Se questi fanno angolo retto tra loro, le carrucole si troveranno convenientemente collocate, purchè, condotta la comune perpendicolare MN ai due assi, la carrucola C si ponga ad una distanza CM da questa retta, eguale al raggio della carrucola D, e reciprocamente la carrucola D ad una distanza DN dalla medesima retta, eguale al raggio della carrucola C.

Questa disposizione tuttochè assai ingegnosa ha un grave inconveniente che la rende affatto inapplicabile tutte le volte che è necessario, che il moto possa trasmettersi alternativamente per i due versi contrari; poichè il tratto *np* che prima veniva da D verso C, venendo invece da C verso D, e viceversa il tratto *mq* che prima veniva da C verso D, venendo da D verso C, ciascuno di essi troverebbesi fuori del piano della carrucola verso cui camminerebbe, ed il cingolo per conseguenza immediatamente scapperebbe da entrambe le carrucole. È quindi generalmente da anteporsi la disposizione seguente, quantunque essa richiegga l'uso di quattro carrucole invece di due sole.

Sieno A*a*, B*b* (*fig.* 11) due assi non contenuti nello stesso piano, e CC′, DD′ due carrucole girevoli intorno a questi assi. Prolungando sufficientemente i piani di queste due carrucole, essi verranno ad incontrarsi nella retta, o comune intersezione GF. Si prendano ad arbitrio su questa retta i due punti *m*, *n*; dal punto *m* si tirino alle circonferenze delle due carrucole le tangenti *m*C, *m*D, e dal punto *n* si tirino similmente alle due circonferenze le tangenti *n*C′, *n*D′. Collocando in *m* una piccola girella di rimando la quale giaccia nel piano delle tangenti *m*C, *m*D, e nel punto *n* un'altra girellina nel piano *n*C′, *n*D′, poi circondando alle quattro rotelle un cingolo senza capi C*m*D*d*D′*n*C′*c*, il moto si trasmetterà tanto per un verso, quanto pel verso contrario, senza rischio che il cingolo abbia mai a scavalcare; poichè rispetto a ciascuna delle quattro rotelle, così il tratto che va, come il tratto che viene si troveranno contenuti nel piano della rotella medesima.

123. In tutti i meccanismi fin qui considerati la ragione delle velocità del pezzo conduttore e del pezzo condotto è costante, cioè il moto si comunica dall'uno all'altro equabilmente. Ma i cingoli servono egualmente alla trasmissione del moto con ragion variabile di velocità. Siano A, B (*tav.* 11, *fig.* 1) due assi paralleli, intorno ai quali possan girare le due puleggie CMI, DFE, la prima perfettamente circolare e ben centrata, l'altra tagliata in forma di qualsivoglia curva convessa differente dal circolo; si avvolga a queste due puleggie un cingolo senza capi CDEFGI mantenuto sempre sufficientemente teso dall'azione del peso P attaccato alla cassa della girella G, la quale, a motivo dell'ufficio cui è destinata, si chiama *girella di tensione*. Risulta dalle cose dimostrate nel § 54, che in ogni posizione del meccanismo le velocità angolari delle puleggie CMI, DEF, staranno in ragione inversa dei segmenti AT, BT, in cui la linea dei centri AB è divisa dal tratto rettilineo CD del balteo, che comunica il movimento dalla girella movente A alla cedente B; ovvero, poichè ciò torna allo stesso, in ragion reciproca delle perpendicolari AC, BL abbassate dai due centri di rotazione A, B sul balteo CD. Ora, a motivo della figura eccentrica della puleggia DF, il punto T cambierà continuamente posizione sulla retta AB, ora avvicinandosi al centro A, ora scostandosene, epperò la ragione delle velocità angolari verrà ora scemando ora crescendo, secondo una legge che dipenderà dalla figura della curva DEF.

Un esempio ovvio di questa maniera di trasmissione del movimento si ha nell'*incannatoio* de' nostri *filatoi* da seta; quivi il filo, disposto in forma di matassa sull'aspo poligonale DFGI, venendo a raccogliersi sul *rocchetto* o *fuso* cilindrico CM, comunica all'aspo un movimento vario di rotazione intorno al suo centro B; egli è manifesto che qui la velocità angolare dell'aspo è *minima* quando la direzione CD del bandolo è perpendicolare a quel braccio BD dell'aspo che risponde al punto D ove il bandolo stesso se ne spicca; la velocità all'incontro è *massima* quando la direzione del bandolo coincide con quella di uno de'lati del poligono DFGI; e scorgesi pur facilmente che queste velocità *minima* e *massima* stanno a quella del rocchetto, come il raggio AC di questo sta al raggio BD, ed all'apotema BO del poligono DFGI (1).

(1) Dicansi, $a$ la distanza AB dei due centri (*tav.* 11, *fig.* 1), $e$, $b$ il raggio della ruota movente ICM; sulla faccia della ruota cedente DEF conducasi ad arbitrio un raggio BE, e riferiscasi ciascun punto D del perimetro alle coordinate polari $EBD = \psi$, $BD = r$, onde sia $r$ funzione nota di $\psi$. Venuto il meccanismo in una posizione qualsiasi, dicasi $\theta'$ l'angolo EBH che il raggio BE fa con la linea dei centri AB prolungata in H, e $\theta$ l'angolo che avrà descritto la ruota movente B, mentre la ruota condotta ha descritto l'angolo $\theta'$; sia finalmente $\varphi$ l'angolo BDT che la tangente DT, secondo la quale opera il tratto DC del balteo, fa col raggio vettore BD condotto al punto di contatto.

Calate dai centri A, B le perpendicolari $AC = b$, $AL = r \sin \varphi$ sulla tangente CD, sarà

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{r \sin \varphi}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Nel triangolo ANB, formato col condurre AN parallela a CD fino ad incontrare in N il prolungamento di BL, saranno

$$AB = a \,, \quad BN = r \sin \varphi + b \,, \quad \text{ang}\, BAN = \theta' + \psi - \varphi \,,$$

e per conseguenza $\quad r \sin \varphi + b = a \sin (\theta' + \psi - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$

Finalmente per essere CD tangente in D alla curva DEF si avrà

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{r\, d\psi}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Le equazioni (2) e (3) insieme con quella della curva DEF determinano $r$, $\theta'$ e $\varphi$ in funzione di $\psi$, e quindi la equazione (1), ossia la

$$b\, d\theta = r \sin \varphi \, d\theta'$$

si riduce alla forma $\quad b\, d\theta = F(\psi)\, d\psi \,;$

Si possono facilmente immaginare molte altre disposizioni atte a produrre per via di cingoli un moto vario di rotazione.

epperò integrandola in guisa che siano insieme $\theta = o$, $\theta' = o$, si avrà anche $\theta$ in funzione della medesima variabile, epperò per ciascun valore di $\psi$ si conosceranno quelli degli angoli $\theta$ e $\theta'$, e della ragione $\frac{d\theta}{d\theta'}$, delle velocità angolari delle due ruote.

Queste formule si posson pure accomodare al caso dell'*incannatoio*, di cui si fa cenno nel testo. Sia infatti BD $= c$ (*fig.* 2) uno dei bracci dell'aspo nella posizione in cui esso fa angolo retto col bandolo DC, e sia $\alpha$ l'angolo ABD che in questa posizione esso fa con la linea dei centri AB: sarà

$$\cos\alpha = \frac{b+c}{a}.$$

Venuto poi il medesimo braccio BD in qualsiasi altra posizione BD' col descrivere l'angolo DBD' $= \theta'$, dicasi $\varphi$ l'angolo BD'$d$ ch'esso farà allora col bandolo C'D'; sarà la perpendicolare B$d = c\sin\varphi$, ed il triangolo AB$e$ darà

$$c\sin\varphi + b = a\sin(\theta' + \varphi - \alpha),$$

ossia

$$\theta' = \alpha - \varphi + \text{arc.}\sin\frac{c\sin\varphi + b}{a};$$

e ponendo per compendio

$$\frac{c\sin\varphi + b}{a} = u;$$

$$\theta' = \alpha - \varphi + \text{arc}(\sin = u);$$

$$d\theta' = -d\varphi + \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Quest'ultimo valore sostituito nella

$$b\,d\theta = c\sin\varphi\,.\,d\theta'$$

darà

$$b\,d\theta = -c\sin\varphi\,d\varphi + \frac{(au-b)\,du}{\sqrt{1-u^2}};$$

Se per esempio i due capi del cingolo (*tav.* 10, *fig.* 24) saranno fermati in E, F sulle superficie di due coni tronchi AC, BD, collocati con le loro basi maggiori in parti contrarie, è chiaro che di mano in mano che il cingolo si verrà raccogliendo sul cono conduttore AC, svolgendosi dal cono condotto BD, scemerà il raggio del primo cono e crescerà quello del secondo, e però girando quello con moto equabile, questo girerà con moto ritardato. Facilmente si vede l'analogia che passa tra questo meccanismo e quello che abbiamo descritto altrove sotto il nome di *ruote di Römer.*

ed integrando in modo che siano insieme $\theta = o$ e $\varphi = 90°$, e designando con $\psi$ l'arco, il cui coseno è $u$, avremo finalmente

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{c \sin \varphi}{b};$$

$$\theta' = \frac{1}{2}\pi - \varphi + (\alpha - \psi);$$

$$b\theta = c \cos \varphi + a(\sin \alpha - \sin \psi) - b(\alpha - \psi);$$

nelle quali formule è contenuta la soluzione della quistione. Posto che sia $m$ il numero de' bracci dell'aspo simmetricamente disposti intorno al centro B, l'angolo $\varphi$, il quale nella posizione iniziale dell'aspo è $= \frac{1}{2}\pi$, andrà diminuendo finchè la direzione del bandolo C'D' coincida con quella del lato DF', cioè fintantochè sia $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$; allora il braccio BD diverrà inoperoso, e sottentrando ad esso il braccio seguente BF, l'angolo $\varphi$ prenderà in un tratto il valore $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}$, poi di nuovo diminuirà, finchè, tornato ad essere $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, l'aspo e tutto il meccanismo avranno riprese le loro posizioni iniziali.

Se si volesse che l'aspo andasse equabilmente per una parte del suo giro, basterebbe sostituire ad alcuno de' suoi lati rettilinei, per esempio al lato FG l'arco corrispondente FNG del circolo circoscritto; poichè allora, giunto il raggio BF nella posizione BD, il movimento diverrebbe equabile, e tale si manterrebbe mentre l'aspo descriverebbe l'angolo EBG, cioè fino a che fosse venuto in BD il raggio BG.

L'altro meccanismo rappresentato nella *fig.* 25 non differisce per nulla da quello che precede, quanto al suo modo di operare. Il *movente* AC, invece di esser conico, è cilindrico, ed il *cedente* BD ha sulla sua superficie scolpita una gola *a elica*, la quale impedisce che il cingolo si sposti scorrendo sulla superficie medesima. Svolgendosi il cingolo dal cono BD per invilupparsi sul cilindro AB, il raggio del primo continuamente diminuisce mentre quello del secondo sta sempre il medesimo; e quindi girando il cilindro con moto equabile, il cono girerà con moto accelerato; oppure volendo che il cono giri con moto equabile, il cilindro dovrà girare con moto ritardato. Questo meccanismo è ben conosciuto dagli orologieri, i quali chiamano *tamburo* il cilindro AC, e danno il nome non troppo proprio di *piramide* al cono BD. Negli orologi però, a rovescio di ciò che vedesi rappresentato nella nostra figura, il capo B del cingolo (che, come abbiamo detto anticipatamente nel § 120, è una catenella), è fermato presso alla base maggiore della piramide, cosicchè di mano in mano che il cingolo si sviluppa da questa e si raccoglie sul tamburo, il raggio del pezzo condotto viene crescendo, e quello del pezzo conduttore rimane costante; e per conseguenza perchè quello si muova equabilmente, è necessario che questo vada con moto accelerato.

## CAPITOLO DICIOTTESIMO

### DELLE RUOTE DENTATE E DELLE DIVERSE SPECIE DI ESSE.

124. I meccanismi di cui abbiamo ragionato nel capitolo precedente, oltre all'essere di poca spesa, facili a stabilire ed a racconciare, hanno il pregio, quando sieno ben costrutti e convenientemente disposti, di produrre un movimento dolce, eguale, tacito, e vengono per queste ragioni frequentemente impiegati nelle arti, e particolarmente in quelle che hanno per oggetto la filatura, la torcitura e la tessitura delle sostanze fibrose. Essi vanno però soggetti a non pochi incomodi che ne fanno fuggir l'uso in molte macchine, e specialmente in quelle che debbono trasmettere sforzi grandissimi, o soggetti a variazioni repentine, quali sono per esempio i cilindratoi, e in quelle nelle quali è necessario che sia accuratissimamente mantenuta la ragione della velocità dei diversi pezzi, quali sono gli orologi. Tutti i baltei formati di sostanze organizzate, sieno essi corde, treccie, cinghie o coreggie, vanno soggetti a perpetue vicende di allungamento e di accorciamento, cagionate dal caldo e dal freddo, dall'umido e dal secco, e che basterebbero sole a farli rigettare ogni volta che si esiga una grande puntualità di movimenti. Le catene vanno bensì in gran parte esenti da questi sconci, ma son pur prive di quella flessibilità, di quella leggerezza che si ricercano ne' baltei, e il loro prezzo è generalmente molto più elevato. Le ruote poi che si conducono per semplice sviluppo e in grazia del solo scambievole attrito vanno soggette, come abbiamo avuto altra volta occasione di osservare, ad inconvenienti non meno gravi. Se le due ruote che debbono

trasmettersi il movimento non sono entrambe perfettamente circolari ed esattamente centrate, esse sostengono una vicendevole pressione or troppo grande, or troppo piccola; e possono talora non più toccarsi, e da queste continue alternative nasce ora un inutile sciupìo di forza, ora un attrito nullo o tanto debole che non basta a costringere la ruota condotta a seguir la ruota conduttrice senza scorrimento. E quand'anche le ruote all'uscir dalle mani del tornitore fossero di rotondità irreprensibile, non potrebber durar lungamente così perfette, a motivo della inevitabile disuguaglianza di durezza e di resistenza delle varie lor parti.

Per tutti questi motivi alle ruote cilindriche o coniche di superficie liscia si sostituiscono generalmente le *ruote dentate*, le cui superficie convesse sono solcate e come ondate, cioè presentano una serie di solchi eguali, separati da eguali eminenze o *denti*, distribuiti su tutta la circonferenza. Quando due ruote così fatte si trasmettono il movimento, i denti dell'una entrano nei solchi dell'altra, e quella non può girare senzachè questa la segua, onde resta rimosso ogni pericolo di scorrimento. Si dice allora che le due ruote s'*imboccano* o s'*incastrano;* ma perchè questo *incastro* sia possibile e il movimento si comunichi in modo continuo e senza salti, è manifestamente necessario che i solchi o *vani* di una delle ruote siano eguali in larghezza ai *denti* dell'altra, o poco maggiori; e viceversa, che i solchi o vani di questa siano eguali ai denti di quella, epperò che la somma delle larghezze di un dente e di un vano, somma che chiamasi *passo*, sia precisamente eguale nelle due ruote. Ogni dente adunque della ruota conduttrice aggrappa un dente della ruota condotta e lo sospinge; ond'è che avanzandosi di un passo la circonferenza della prima ruota, essa fa pure avanzare d'un passo la circonferenza della seconda, epperò le due circonferenze si muovono come se la comunicazione del moto si facesse per semplice contatto di sviluppo, tra le circonferenze liscie di due ruote simili a quelle che abbiamo considerate nel capitolo quattordicesimo. Queste circonferenze liscie, che si dovrebbero mettere al luogo di due ruote dentate, per ottenere la medesima ragione tra le loro velocità angolari, si chiamano le *circonferenze primitive* delle due ruote (gli orologieri le chiamano i *circoli geometrici*), e i raggi loro si determinano nel modo che abbiamo lungamente spiegato altrove.

125. Egli è inutile di ripeter qui, che la ruota che dà il movimento all'altra si dice *ruota movente* o *conduttrice*, e quella che lo riceve *ruota cedente* o *condotta*. Nei grandi meccanismi, come per esempio ne' mulini e nelle filature di cotone, la prima ruota, quella che tramanda il moto a tutte le altre, è la ruota *maestra* o *motrice*. In ogni incastro di due ruote disuguali la ruota maggiore, che fa i suoi giri più pigri, si chiama perciò la *ruota lenta*, e l'altra che si rivolge più speditamente la *ruota celere:* a questa si dà però più ordinariamente il nome di *rocchetto*, e i suoi denti, se sono poco numerosi, prendono il nome di *ali* o di *pinne*. Una ruota, che non conferisce per nulla nel far variare la velocità angolare di quelle con cui imbocca, si chiama *ruota oziosa:* *ruota folle* poi è quella che, essendo solamente infilzata sopra un asse rotondo, ma non fermata o imbiettata sovra di esso, può muoversi liberamente senza comunicare a questo il suo movimento; tale, per esempio, è negli orologi quella ruota che i Francesi chiamano *roue de chaussée*, e gl'Italiani *ruota cannona*. Diciamo ancora, per non aver poi a tornare su queste denominazioni, che gli assi delle ruote dentate si chiamano più propriamente *alberi* o *stili*.

Gli assi di due ruote che fanno incastro possono essere paralleli, o convergenti, od anche non contenuti nello stesso piano; nel primo caso le due ruote giacciono entrambe nel medesimo piano perpendicolare ai due assi, e si chiamano *ruote piane;* nel secondo caso esse stanno in piani differenti, rispettivamente perpendicolari a ciascuno degli assi, e si chiamano *ruote d'angolo;* nel terzo caso finalmente prendono il nome di *ruote sghembe.*

Le ruote piane hanno ordinariamente i loro denti scolpiti sulla parte convessa della circonferenza, cioè sporgenti all'infuori, e le due ruote che fanno incastro si trovano allora collocate una accanto all'altra, in modo che la distanza dei loro centri è eguale alla somma de' raggi de' circoli primitivi. Queste ruote (*tav.* 11, *figg.* 12, 15 e 21) sono dette *ruote a sprone*, per la somiglianza che hanno alla *stelletta* o *spronella* degli speroni da cavalcare. Se il raggio delle ruote è piccolo, queste, sian esse di legno o di metallo, si fanno in forma di disco pieno, tutto d'eguale spessezza, o pur assottigliato tra il centro e il lembo per diminuirne il peso, come si vede nella ruota C della *fig.* 12. Ma per le ruote grandi questa costruzione sarebbe troppo pesante, ed allora, se sono di legname, si congegnano con un gavello di più quarti saldamente calettati tra loro e con l'albero, mercè di *razze*, oppure, come vedesi nella *fig.* 15, di *crociere;* se sono di gitto, il gavello, che più propriamente dirassi allora *ciambella*, e le razze si sogliono rafforzare con l'aggiunta di *costole* sporgenti: queste costole o nervi si veggono disegnati nelle due ruote A, B della *fig.* 12.

Nell'incastro di due ruote a sprone le circonferenze primitive si toccano, siccome abbiam detto, esternamente; ma si sa dalla geometria che due circoli disuguali possono pur avere un contatto interno, ed allora la distanza de' loro centri è eguale non più alla somma, ma alla differenza dei due raggi, cioè tutto il circolo minore è contenuto entro al maggiore. Può dunque un rocchetto a sprone essere collocato nell'interno della ciambella di una ruota grande e comunicare ad essa il movimento, purchè i denti di questa, invece di essere scolpiti sulla sua parte convessa od esterna, siano scolpiti nella parte concava od interna, e convergano verso il centro. Una ruota così fatta (*fig.* 16) dicesi *ruota annulare*, ed è manifesto che le crociere o le razze, che tengono la ciambella unita con l'albero, non possono allora giacere nel piano della ciambella medesima, ma deggiono riportarsi indietro, onde lasciare a questa libero il moto intorno al rocchetto, il cui albero debb'essere mozzato a fiore della base di esso, cioè non dee prolungarsi al di là del piano della ciambella della ruota maggiore.

Ogni linea retta, potendo considerarsi come un arco di circolo di raggio infinito, le dentiere rettilinee, come quelle rappresentate in C, B nelle *figg.* 16 e 17, *tav.* 1, vanno riguardate come appartenenti alla grande famiglia delle ruote dentate, quantunque il nome di *ruote* sembri a primo aspetto convenirsi assai male con la loro forma. Nell'incastro di un rocchetto con una dentiera il moto si trasmette ordinariamente da quello a questa; alcune volte però il rocchetto è condotto dalla dentiera.

126. I costruttori di mulini fanno uso frequente di una specie di rocchetti assai rozzi, ma di facile costruzione, detti *lanterne*. Consistono questi (A *figg.* 15 e 18) in due dischi piani e paralleli di grossa tavola di legno, attraversati nel mezzo da un albero quadrato, e sul loro perimetro da caviglie cilindriche, o *fusi* eguali ed equidistanti, che fanno uffizio di denti. Simili lanterne si fanno pur talvolta di metallo, come può vedersi particolarmente negli orologi da campanile.

Quando una lanterna debb'esser di diametro molto grande si suol sopprimere uno de' due dischi; i fusi, che allora diconsi *caviglie* o *piuoli*, sono semplicemente impiantati da uno de' loro capi nel disco unico che si conserva, e che per più leggerezza si fa a gavello e a crociere. Queste ruote a *caviglie* sono talora impiegate a trasmettere il movimento tra assi perpendicolari nei modi espressi nelle *figg.* 17 e 18, ed anche tra assi paralleli, come si vede nelle due ruote B, C della *fig.* 13; possono pure impiegarsi qualche volta con vantaggio a guisa di ruote annulari, come mostra la *fig.* 19. Una dentiera a piuoli (*fig.* 14) si chiama più volentieri *rastrelliera*.

Gli orologieri adopran un'altra specie di ruote d'angolo dette *ruote corone* (*fig.* 20). In queste la ciambella, sottilissima nel senso del raggio, ha una larghezza notabile parallelamente all'albero; la loro forma insomma è affatto simile a quella delle ruote che abbiamo descritte nel capitolo sedicesimo, § 115, sotto il nome di ruote di Ugenio, ben inteso però che l'albero non è eccentrico, e che esse sono armate di denti che incastrano con le ali di un rocchetto. Le ruote corone sono pur talvolta adoperate a trasmettere il movimento tra assi paralleli, come se ne ha un esempio nella ruota A della *fig.* 13.

Dacchè i metalli, e particolarmente il ferro fuso hanno preso con tanto vantaggio il luogo del legno nella costruzione dei grandi meccanismi, le ruote a piuoli sono quasi assolutamente abbandonate, e non se ne veggono oramai più, se non nei mulini più grossolani. In tutte le macchine accuratamente costrutte, la comunicazione del moto tra assi convergenti ad angolo retto o non retto, si fa per via di *ruote coniche* (*tav.* 12, *fig.* 1) le quali derivano dai coni che si conducono per isviluppo (capitolo quindicesimo), come le ruote dentate piane derivano dalle semplici ruote descritte nel capitolo quattordicesimo.

Gli assi delle ruote d'angolo, sieno esse ruote coniche o a piuoli (*tav.* 11, *fig.* 17, 18 e 20; *tav.* 12, *fig.* 1, 2 e 3) essendo diretti secondo linee convergenti, essi non possono entrambi prolungarsi al di là del punto, ove le loro direzioni s'incontrano, ed uno di essi almeno dee troncarsi al di qua di questo punto. Può avvenire che questo incontro si trovi nel piano di una delle due ruote (*tav.* 12, *fig.* 2), ed allora questa si muta in un piano circolare, nel qual caso i suoi denti sono diretti secondo i raggi; può anche avvenire che l'incontro dei due assi facendosi nell'interno o al di là di una delle due ruote (*fig.* 3), questa, invece di essere dentata sulla sua convessità, abbia i denti scolpiti nella sua concavità: queste ultime forme di ruote coniche, delle quali è facile riconoscere l'origine nei meccanismi rappresentati nelle *figg.* 23 e 24 della *tav.* 8, si ponno però sempre evitare disponendo diversamente le ruote sul loro asse.

127. Non ci tratterremo a parlar qui delle *ruote di forza*, delle *ruote d'incontro* o *serpentine*, delle *ruote a tacche*, delle *ruote a stella* ecc., perchè queste hanno usi speciali, che ci porgeranno occasione di parlarne di mano in mano che ne scadrà il bisogno. Neppure staremo a descrivere i mezzi meccanici usati per intagliare con tutta la regolarità richiesta i denti delle varie specie di ruote, di cui abbiamo fatto conoscere la disposizione e l'uso. Questa descrizione appartiene alla tecnologia piuttosto che alla cinematica applicata, e ci basterà il dire, che le ruote di gitto escono belle e dentate dalla forma, e si aggiustano poi col bulino e con la lima; che le ruote di ferro o d'ottone s'intaccano mercè una macchinetta volgarmente chiamata *piattaforma* o *macchina da dividere*, perchè serve nello stesso tempo a dividere la circonferenza nel voluto numero di parti eguali, ed a scolpire in essa i vani tra dente e dente; che le piccole ruote di legno si fanno di tavola, si torniscono e poi s'intaccano con la *sega da volgere*, col cesello e con la raspa; ma che nelle grosse ruote di commesso *tav.* 11, *fig.* 15 B) i denti, fatti di legno più duro che il gavello, sono calettati a coda nel gavello medesimo: uno di questi denti vedesi rappresentato a parte in C in iscala molto maggiore. Così pure si pratica sovente per le maggiori ruote di gitto, incastrando nel loro gavello denti di legno duro, perchè questi fanno meno attrito che se fosser di ferro, si logorano quindi men rapidamente, e possono all'uopo ripararsi e mutarsi facilmente.

# CAPITOLO DICIANOVESIMO

## DEL COMPUTO E DELLA NOTAZIONE DEI ROTISMI DENTATI.

128. Poichè l'aggiunta dei denti non altera punto la ragione delle velocità angolari delle ruote, la quale rimane precisamente la stessa come se a queste si sostituissero i loro circoli primitivi, saranno immediatamente applicabili alle ruote dentate le regole che abbiamo date pel computo delle velocità angolari o del numero dei giri simultanei delle ruote estreme, quando si conoscono i raggi di tutte le ruote; o viceversa per la ricerca di questi raggi, quando è data la ragione delle velocità angolari.

In questa applicazione occorrono due osservazioni importanti: la prima che il *passo* essendo necessariamente lo stesso in due ruote che fanno incastro, le lunghezze delle circonferenze de' circoli primitivi stanno tra loro come i numeri dei passi o dei denti delle due ruote; or le circonferenze stanno pur come i raggi, epperò alla ragion de' raggi si può sostituire quella de' numeri dei denti. La seconda, che il numero de' denti di qualunque ruota è necessariamente numero intero, la qual cosa è evidente per se medesima; e di più che questo numero è sempre compreso fra certi limiti che non si possono eccedere nè in più, nè in meno senza grave sconcio. Vedremo infatti a suo tempo che in una macchina ben costrutta niun rocchetto debbe aver meno di un certo numero di *ali;* e se si volesse ad una ruota dare un numero grandissimo di denti, essa verrebbe poi troppo pesante e sproporzionata, onde negli orologi, per esempio, i denti di ogni ruota non posson guari eccedere il centinaio.

Da queste osservazioni noi possiamo dedurre le conchiusioni seguenti:

1° Nell'incastro di una ruota e di un rocchetto i numeri contemporanei dei loro giri stanno in ragione inversa dei numeri dei loro denti.

2° Se più ruote sono così disposte, che ciascuna di esse faccia incastro con quella che la precede e con quella che la segue, la ragione de' numeri de' giri contemporanei della prima e dell'ultima ruota è indipendente dal numero delle ruote intermedie e da quello de' loro denti, ed è sempre eguale inversamente alla ragione de' numeri dei denti delle ruote estreme. Le ruote intermedie sono dunque *oziose* quanto al modificar la velocità angolare.

3° Se ciascun albero intermedio porta due ruote, una che riceva il movimento dall'asse precedente, l'altra che lo trasmetta all'asse seguente (*tav.* 11, *fig.* 21), il numero delle rotazioni dell'ultima ruota *condotta*, mentre la prima ruota *conduttrice* fa un giro solo, è eguale al prodotto dei numeri dei denti di tutte le ruote conduttrici diviso pel prodotto dei numeri dei denti di tutte le ruote condotte. Così nell'esempio della citata figura le ruote conduttrici avendo 9, 10 ed 8 denti, e le ruote condotte avendone 30, 24 e 20, il cercato numero dei giri dell'ultima ruota sarà

$$\frac{9 \times 10 \times 8}{30 \times 24 \times 20}, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{20^{\text{mo}}}:$$

che è quanto dire, che la prima ruota *o* dovrà fare 20 giri, perchè l'ultima C faccia un giro solo.

4° L'ordine con cui sono disposte le ruote non ha veruna influenza sulla ragione delle velocità estreme, cioè questa ragione non si altera punto scambiando comunque tra di loro le ruote conduttrici, e tra di loro parimenti le ruote condotte.

129. Data poi la ragione dei giri simultanei delle ruote estreme, per determinare il numero degli incastri, o delle coppie di ruote che si dovranno impiegare, si procederà così: si stabilirà il minimo numero di ali che possa avere un rocchetto, e il massimo numero di denti che possa avere una ruota, e si dividerà questo per quello; io suppongo che si adottino i numeri 8 e 120; il quoziente sarà 15. Se la data ragione delle velocità estreme sarà minore di 15, essa potrà ottenersi con una sola coppia di ruote cioè con un solo incastro; se no, saranno necessarie tante coppie almeno, quante volte il quindici debb'essere moltiplicato per se stesso per produrre un numero eguale alla data ragione. Se per esempio si vorrà congegnare un rotismo in cui l'ultima ruota faccia 3375 giri, mentre la prima ne fa uno solo, saranno necessarie almeno tre coppie di ruote, perchè 3375 è eguale a 15 × 15 × 15. Ma se i giri dell'ultima ruota dovessero essere 4000, allora il numero delle coppie di ruote o degli incastri dovrebb'essere quattro almeno. Sarà facile il formare così la tavola seguente:

| *Ragione dei giri estremi.* | *Numero degl'incastri necessarii.* |
|---|---|
| da 1 a 15 | 1. |
| da 16 a 225 | 2 |
| da 226 a 3375 | 3 |
| da 3376 a 51225 | 4 |
| da 51226 a 768375 | 5 |
| ecc. | ecc. |

Se si assumessero altri valori pel numero minimo delle ali dei rocchetti e pel numero massimo dei denti delle ruote, la tavola sarebbe differente: così coi numeri 10 e 100 si avrà:

| *Ragione dei giri* | *Numero degl'incastri* |
|---|---|
| da 1 a 10 | 1 |
| da 11 a 100 | 2 |
| da 101 a 1000 | 3 |
| da 1001 a 10000 | 4 |
| ecc. | ecc. |

130. Trovato il numero degl'incastri, per determinar quello dei denti di ciascuna ruota si assumeranno arbitrariamente i numeri dei denti di tutti i rocchetti, e si moltiplicherà il prodotto di tutti questi numeri pel numero dei giri che dee fare l'ultimo rocchetto mentre la prima ruota fa un giro solo. Il numero così trovato si scomporrà in tanti fattori, quanti debbono essere gl'incastri, e ciascuno di questi fattori sarà il numero dei denti che debbon darsi ad una delle ruote. Generalmente questa scomposizione si potrà fare in più maniere, e ciascuna di esse somministrerà un sistema di ruote dentate atte a produrre la voluta ragione di velocità estreme, fra i quali sistemi si sceglierà il più conveniente, che sarà, generalmente parlando, quello in cui i numeri dei denti delle diverse ruote lente saranno meno disuguali tra loro.

Supponiamo, per esempio, che con tre incastri si voglia formare un rotismo in cui l'ultimo rocchetto faccia 300 giri, mentre la prima ruota ne fa uno solo: i rocchetti debbano avere 10 denti ciascuno: il prodotto dei numeri di tutti i rocchetti sarà 1000, che moltiplicato per la ragione dei giri che è 300 farà 300000: questo è il numero che si dee scomporre in tre fattori, e con pochi tentativi si troverà che ciò si può fare ne' varii modi seguenti:

$$25 \times 25 \times 480$$
$$25 \times 50 \times 240$$
$$25 \times 100 \times 120$$
$$25 \times 80 \times 150$$

$30 \times 100 \times 100$

$30 \times 80 \times 125$

$40 \times 50 \times 150$

$40 \times 75 \times 100$

$50 \times 60 \times 100$

$50 \times 50 \times 120$

$50 \times 75 \times 80$

ecc. ecc. ecc. (1);

e fra tutte queste combinazioni, e le altre che si potrebbero facilmente formare, si sceglierà la più conveniente che sarà l'ultima che abbiamo scritta, come quella in cui le tre ruote saranno più prossime ad avere lo stesso numero di denti.

(1) Per formare queste diverse combinazioni nel modo più facile, convien cercare prima tutti i fattori *primi* del numero proposto, e poscia combinarli in tutte le maniere possibili. I fattori *primi* si cercano dividendo successivamente il numero proposto pei numeri minori per cui esso sia divisibile, finchè si arrivi ad un numero *primo*, cioè che più non ammetta divisione. Sia per esempio il numero 324; ne cercheremo i fattori primi così:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 324 | che diviso | per | 2 | dà |
| 162 | — | — | 2 | dà |
| 81 | — | — | 3 | dà |
| 27 | — | — | 3 | dà |
| 9 | — | — | 3 | dà |
| 3 | — | — | 3 | |

i fattori primi sono dunque 2. 2. 3. 3. 3 3: se il numero 324 si volesse scomporre in due fattori in tutti i modi possibili, converrebbe combinare in tutti i modi possibili i sei fattori semplici ora trovati, per esempio così:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | e | 2. 3. 3. 3. 3 | cioè | 2 | e | 162 |
| 2. 2. | e | 3. 3. 3. 3 | cioè | 4 | e | 81 |
| 3. | e | 2. 2. 3. 3. 3 | cioè | 3 | e | 108 |
| . . . | . . . | . . . | | | | |
| 2. 2. 3. | e | 3. 3. 3 | cioè | 12 | e | 27 |
| 2. 3. 3. | e | 2. 3. 3 | cioè | 18 | e | 18 |

ecc. ecc.

Ho supposto in questo esempio che tutti e tre i rocchetti dovessero avere lo stesso numero di ali, ma quand'anche così non fosse, la regola non si muterebbe per nulla; così se i numeri delle ali fossero 12, 10 e 6, il loro prodotto sarebbe 720, e moltiplicandolo per 300 (ragione delle velocità angolari estreme) si avrebbe il numero 216000 da scomporre in tre fattori. Ora con un po' di attenzione, si vedrà che, fra molte altre maniere, questo numero può pure scomporsi nei tre fattori eguali 60, 60, 60; epperò le tre ruote potranno essere tutte eguali o di sessanta denti ciascuna.

131. È cosa utile il poter dar per iscritto una giusta idea del gioco di un rotismo senza far uso di disegni e senza entrare in lunghe descrizioni; ciò si ottiene facilmente per mezzo di una conveniente *notazione;* quella che ci par migliore riposa su questi semplici principii:

1° Rappresentare ciascuna ruota e ciascun rocchetto pel numero dei loro denti: così *ruota* 54 vorrà dire ruota di 54 denti, e *rocchetto* 6 vorrà dire rocchetto di sei ali.

2° Scrivere sulla medesima linea orizontale unendoli con un tratto — i numeri relativi a tutte le ruote e rocchetti che sono fermati sul medesimo albero, e fanno per conseguenza il loro giro nel medesimo tempo: così

Ruota 54 — Rocchetto 6

significherà che il medesimo albero porta una ruota di 54 denti ed un rocchetto di sei ali.

3° Scrivere l'uno al dissopra dell'altro unendoli con un tratto verticale i due numeri relativi a due ruote che fanno incastro: così

Rocchetto 8<br>
|<br>
Ruota 48.

vorrà dire che un rocchetto di 8 ali conduce per incastro una ruota di 48 denti.

4° Cominciar sempre a notare il numero relativo alla ruota più vicina al primo motore. Così la notazione

Manovella M - Rocchetto O
9
|
Ruota A Rocchetto *a*
30 —— 10
|
Ruota B Rocchetto *b*
25 —— 8
|
Ruota C
25 - Subbio S e Peso P

rappresenterà fedelmente il meccanismo della *fig.* 21, *tav.* 11, mercè del quale una forza applicata alla manovella M, solleva il peso P legato ad una corda che si avviluppa sul subbio S.

E quest'altro tipo

Peso P e Subbio S — Ruota A — Ruota B
20 25
| |
Rocchetto *c* Rocchetto *d* Ruota D
8 10 —— 24
|
Rocchetto *e*
12

sarà la sincera rappresentazione del rotismo, di cui la *fig.* 22 indica la disposizion generale, e nel quale il peso P facendo girare il subbio S e le due ruote A e B fermate sul medesimo asse, comunica il moto al rocchetto *a* per mezzo della prima, ed al rocchetto *c* per mezzo della seconda.

132. Per meglio comprendere l'uso di questo modo di rappresentar con numeri un rotismo qualunque, facciamone l'applicazione ad un esempio men semplice. La *fig.* 23, *tav.* 11 mostra la disposizione interna del *castello* di un orologio da tasca della costruzione più comune: *aa*, *bb* sono le due *cartelle* anteriore e posteriore, le quali unite tra loro da *colonnini* (che si sono ommessi nella figura per non farla troppo complicata) sostengono gli alberi di tutte le ruote, e formano come la gabbia, o l'ossatura dell'orologio: *uu* è quella piastra smaltata che prima si mostra agli occhi di chi osserva l'orologio esteriormente, che per questa ragione si chiama la *mostra* (noi Piemontesi la diciamo malamente *quadrante*), e innanzi alla quale girano le lancette *xx* dei minuti ed *yy* delle ore. Tra la mostra *uu*, e la cartella anteriore *aa* sono contenute quattro ruote, che si chiamano le *ruote della quadratura:* tra le due cartelle *aa*, *bb* poi girano *nove ruote* o *rocchetti* che compongono ciò che dicesi propriamente il *movimento dell'orologio*.

Il pezzo motore di tutta la macchina è il *tamburo* D, cioè un cilindro cavo nel quale è inviluppata a modo di spirale la *molla maestra*, e questa molla sviluppandosi in grazia della propria elasticità, fa girare il tamburo, il quale, per via di una catenella, comunica il moto alla piramide C (V. § 124). Sull'albero della piramide, e contro alla base maggiore di questa è fermata una ruota di 60 denti, che dicesi appunto *ruota della piramide;* essa fa un giro in sei ore, ed imbocca in un rocchetto *b* di sole 10 ali, il cui albero collocato nel centro dell'orologio lo trapassa da parte a parte, e sporgendo fuori nel mezzo della mostra in V, porta la lancetta *xx* dei *minuti;* è chiaro infatti che il rocchetto *b* avendo sei volte meno denti che la ruota C dee girare sei volte più presto, e far per conseguenza la sua rivoluzione in un'ora, od in 60 minuti primi. Sullo stesso albero del rocchetto *b*, e contro al rocchetto medesimo è pur fermata un'altra ruota B di 60 denti, detta *ruota di centro* a motivo del luogo che occupa, e questa imboccando un rocchetto *e* di 8 ali, fa fare ad esso ed alla *terza ruota* E portata sul medesimo albero, fa fare, dico, a questi un giro in 8'. La terza ruota E, armata di 48 denti, fa incastro col rocchetto *f* di sei ali, e questo rocchetto insieme con la *ruota corona* F ch'egli strascina con sè, fa un giro in ogni minuto primo, cioè in 60"; epperò se l'albero comune del rocchetto *f* e della ruota corona F, si prolungasse fino al di là della *mostra* dell'orologio, e portasse una piccola lancetta, questa potrebbe indicare i minuti secondi, scorrendo con la sua punta sopra un piccolo circolo segnato eccentricamente sulla mostra, e diviso in sessanta parti eguali.

La ruota corona finalmente si aggrappa co' suoi 48 denti nel rocchetto *m* di sei ali, e gli fa fare un giro in sette secondi e mezzo; e nello stesso tempo fa pure il suo giro la *ruota serpentina* S fermata sul medesimo albero.

Per amor di chiarezza, di mano in mano ch'io son venuto descrivendo le varie ruote che compongono il *movimento* dell'orologio, ho pure indicati i loro *periodi*, cioè le durate delle loro rivoluzioni. Ma quale è la cagione che le obbliga a girare appunto nei tempi a ciascuna assegnati? L'organo che le frena e le impedisce di andare più rapidamente? È chiaro infatti che se non vi fosse nel meccanismo qualche *regolatore* che ne moderasse il movimento, appena caricato l'orologio la molla maestra si svilupperebbe a furia, e tutto il moto che essa comunica agli altri pezzi si consumerebbe in pochi minuti, invece di durare per un giorno intero. Ora questo regolatore, necessario a frenare il moto di tutto il meccanismo, opera per via di ciò che gli orologieri chiamano uno *scappamento*. Di questi scappamenti ve ne ha molte specie conosciute sotto nomi differenti; basta qui il dire che tutti hanno per oggetto di trattenere i denti dell'ultima ruota lasciandoli *scappare* a uno a uno, a regolari intervalli di tempo.

Nell'esempio che ora consideriamo, la *serpentina* S ha quindici denti, e lo scappamento lasciandone passare uno ad ogni mezzo minuto secondo, ne segue che essa impiega appunto sette secondi e mezzo per giro, e tutte le altre ruote hanno per conseguenza i periodi che abbiamo loro assegnati.

Noi abbiam costrutto così un orologio capace di segnare i minuti primi ed i secondi; prima di compierne la fabbrica coll'aggiungere le ruote della quadratura destinate a mettere in moto anche la lancetta delle ore, cominceremo ad applicare le regole di notazione precedentemente spiegate alla parte del roteggio finora descritta, la quale ci verrà chiaramente rappresentata dal tipo seguente: la colonna a destra contiene l'indicazione de' periodi di tutte le ruote.

| | | *Periodi* |
|---|---|---|
| | (Piramide) — 60 .............................. | 6 ore |
| | \| R. di centro | |
| Lancetta dei minuti | — 10 — 60 ....................... | 1 ora |
| | \| 3ª ruota | |
| | 8 — 48 ................. | 8 minuti |
| | \| R. corona | |
| Lancetta dei secondi | ———— 6 — 48 ............ | 1 minuto |
| | \| serpentina | |
| | 6 — 15 ...... | 7'' ½ |

133. Torniamo ora all'*albero di centro*, a quello che sostiene il rocchetto *b*, e la ruota B. Già abbiam detto che esso sporge al di là della mostra, e porta in cima la lancetta dei minuti; se questa però fosse così fermata sull'albero che non potesse assolutamente girare se non con esso, quando l'orologio segna falso e si vuol regolare, non si potrebbe muovere innanzi o indietro la lancetta dei minuti senza cacciar parimenti innanzi o indietro tutto il *movimento*, che sarebbe gravissimo sconcio. A ciò si è provveduto: la lancetta non è fermata direttamente sull'albero, bensì sopra un cannoncino detto *la calza*, perchè appunto a modo di calza abbraccia

l'albero e quasi lo veste, ed a motivo dello scambievole attrito, partecipa al movimento di esso. Questa calza adunque penetrando tra la mostra e la cartella anteriore porta un rocchetto *n* di 12 ali, il quale fa imbocco con la ruota P di 48 denti, detta la *ruota di scambio*, e questa si mena dietro il rocchetto *p* di 16 denti, il quale vien finalmente imboccare nella ruota Q di 48 denti, mobile intorno alla calza, perchè montata sopra un secondo *cannone* maggiore della calza medesima, ch'esso circonda senza attrito sensibile. Quest'ultima ruota Q si chiama perciò la *ruota cannona*, e non è difficile di vedere che facendo il rocchetto di centro *b* un giro all'ora, la ruota di scambio P farà un giro in 4 ore, e la ruota cannona Q, un giro in dodici ore; il cannone di questa porterà dunque la lancetta delle ore, e l'orologio nostro sarà compiuto di tutto punto.

L'incastro del rocchetto *n*, della ruota di scambio P, del suo rocchetto *p* e della ruota cannona Q, che come abbiam detto chiamansi le ruote della quadratura, è rappresentato nel tipo seguente:

| | | *Periodi* |
|---|---|---|
| Lancetta dei minuti — | R. di centro 12 — 60 | 1 ora |
| | R. di scambio 16 — 48 | 4 ore |
| Lancetta delle ore — | R. cannona 48 | 12 ore |

e l'orologio intero sarà rappresentato come si vede nella pagina che segue.

*Tipo di un orologio comune da tasca.*

```
                                                                                          Periodi
                        (Piramide) — 60 ............................................ 6 ore
                                      |
                  Rocch. della quadr. |  R. di centro
Lancetta dei minuti ———— 12 ——— 10 ——— 60 .......................................... 1 ora
                          |              |
                    R. di scambio        |
                16 —— 48 (periodo 4 ore) |    3ª ruota
                 |                       8 ——— 48 ............................... 8 minuti
           R. cannona                            |
Lancetta delle ore —— 48 (periodo 12 ore)        |
                                                 |   R. corona
Lancetta dei secondi ——————————————————————————— 6 ——— 48 .................... 1 minuto
                                                        |
                                                        |   serpentina
                                                        6 ——— 15 .......... 7'' 1/2
                                                              |
                                                         scappamento
```

134. Gli orologieri chiaman *calibro* una piastretta rotonda di ottone dello stesso diametro dell' orologio che vogliono costruire, e sulla quale essi incidono la pianta di esso, cioè tanti circoli che rappresentano la grandezza e la posizione di tutte le ruote che si propongono d'impiegare. Si dà pure talvolta il nome di calibro alla disposizione stessa dell'orologio, ed a qualunque notazione intesa a rappresentarla con numeri. Il calibro di cui ci siamo finora occupati è stato proposto dal celebre Ferdinando Berthoud (1), con questa sola differenza, ch'egli dava alla ruota della piramide cinquantaquattro denti invece di sessanta, ed al rocchetto della ruota di centro dodici ali invece di dieci, onde il periodo della prima ruota era di quattro ore e mezzo invece di sei ore.

Quando il numero dei denti di una ruota è multiplo esatto del numero dei denti del rocchetto con cui incastra, le stesse ali del rocchetto vengono sempre ad imbattersi con gli stessi denti della ruota: così se il rocchetto ha 8 ali, e la ruota 24 denti, la prima ala incontra sempre il primo dente, il nono e il diciasettesimo; la seconda ala incontra sempre il secondo dente, il decimo e il diciottesimo; e così via via l'ottava ala mai non tocca altri denti che l'ottavo, il sedicesimo ed il ventiquattresimo. Ne segue che qualora vi abbia, come sempre vi ha, in alcun dente dell'una o dell'altra ruota qualche difetto di materia o di forma, questo dente incontrandosi sempre ne' medesimi denti dell'altra ruota avrà in breve guasti e sformati e quelli e se stesso.

(1) Ferdinando Berthoud, nato a Plancemont-Couvet, contado di Neuchâtel, nel 1727, morto a Groslay nel 1807; venne a Parigi nel 1745, fu macchinista della R. Marineria, membro dell'Accademia delle scienze di Parigi, della Società R. di Londra e della Legion d'onore. Consacrò l'intera sua vita al perfezionamento della sua arte, e particolarmente dei *cronometri*, ossiano orologi ad uso dei navigatori. Scrisse molte opere giustamente riputate sulla orologieria.

Se all'incontro i numeri dei denti delle due ruote saranno primi tra di loro, cioè non avranno nissun fattor comune, lo stesso dente del rocchetto toccherà successivamente tutti i denti della ruota, e non tornerà ad incontrarsi con ciascuno, se non dopo che la ruota avrà fatti tanti giri quante sono le ale del rocchetto: così se queste sono 8 e i denti della ruota 25 (numeri primi fra loro) la prima ala del rocchetto toccherà successivamente i denti 1°, 8°, 16°, 24°, 7°, 15°, 23°, 6°, 14°, 22° ecc. e non li avrà toccati tutti se non dopo otto giri interi della ruota; il danno proveniente da irregolarità di forma o di materia si scompartirà dunque su tutti quanti i denti, e sarà di gran lunga minore. In que' meccanismi in cui non è necessaria una rigorosa determinazione delle velocità angolari delle ruote estreme, i costruttori sono quindi soliti aggiungere una unità al numero dei denti della ruota più numerata, a fin di rendere questo numero *primo* rispetto a quello delle ali del rocchetto; il dente così aggiunto si può chiamare *dente di fuga* o *dente di cacciata.*

Nel calibro d'orologio da noi riferito la ruota della piramide avendo sei volte appunto più denti che il rocchetto di centro, il loro incastro andrebbe soggetto allo sconcio da noi testè avvertito: questo è un po' minore nel calibro del Berthoud, perchè qui i denti essendo 12 e 54, ciascuna ala del rocchetto non torna ad imbattersi in un dente determinato della ruota, senonchè quando questa ha compiti due giri: infatti divisi i due numeri 12 e 54 pel comune divisore 6, rimangono i quozienti 2 e 9.

# CAPITOLO VENTESIMO

## GENERAZIONE E PROPRIETÀ DELLE EPICICLOIDI.

135. Noi abbiamo finora considerato nelle ruote il numero de' loro denti insegnando a determinar questo numero in modo, che le durate delle rotazioni abbiano tra loro certe determinate ragioni; ma non abbiam per nulla ricercato qual forma convenga dare ai denti stessi, acciò la ragion delle velocità di due ruote che fanno incastro si mantenga assolutamente invariabile, voglio dire perchè, camminando equabilmente la ruota conduttrice, la velocità della ruota condotta si mantenga sempre puntualmente la stessa, dall'istante in cui due denti si aggrappano fino a quello in cui si abbandonano. Facile è il persuadersi che questa condizione non può essere adempiuta con qualsivoglia forma di denti; supponiamo infatti che la ruota A (*tav.* 12, *fig.* 4) movendosi equabilmente intorno al suo centro, comunichi il movimento alla ruota B, col sospingere una caviglia o asticciuola $b$ perpendicolare al piano di essa, per mezzo dello sprone rettilineo $ad$ fitto nella circonferenza della prima ruota secondo il prolungamento del raggio $Aa$. Girando la ruota conduttrice, lo sprone passerà successivamente nelle posizioni equidistanti $ad$, $a'd'$, $a''d''$, $a'''d'''$, $a^{iv}d^{iv}$ e impiegherà tempi eguali a venire dall'una all'altra; l'asticciuola $b$ in questi successivi ed eguali intervalli di tempo sarà sospinta da $b$ in $b'$, da $b'$ in $b''$, da $b''$ in $b'''$, da $b'''$ in $d^{iv}$, e descriverà così spazi manifestamente crescenti; il moto della ruota B sarà dunque accelerato mentre quello di A è equabile, e la condizione proposta non sarà adempiuta. Ma noi vedremo fra poco che, se invece dello sprone rettilineo della *fig.* 4 s'impiegherà una *palmola* piegata secondo una

curva conveniente (*fig.* 5), gli archi $bb'$, $b'b''$, $b''b'''$, $b'''d^{\mathrm{iv}}$ descritti in tempi eguali riusciranno tutti eguali tra loro, e la ruota B riceverà dalla A lo stesso movimento equabile, come se la trasmissione si facesse per semplice contatto delle due circonferenze primitive $aa'a''$..... $bb'b''$.....

Lo stesso effetto si può ottenere col dare uno sprone a ciascuna delle due ruote, sia ch'essi facciansi entrambi curvilinei come nella *fig.* 7, oppure uno rettilineo e l'altro curvilineo come nella *fig.* 6; risulta infatti dalle dimostrazioni del capitolo nono, che una sola condizione è necessaria affinchè la ragione delle velocità angolari delle due ruote si mantenga costante; è necessario cioè che in tutte le posizioni dei due sproni $a'd'$, $b'c'$, la comune perpendicolare NN' condotta nel loro punto di contatto M venga sempre a tagliare la linea dei centri AB nello stesso punto T, dove si toccano le due circonferenze primitive; poichè allora le due velocità angolari staranno sempre in ragione inversa dei due segmenti AT, BT della linea dei centri, cioè staranno in ragione inversa dei raggi primitivi delle due ruote, che è quanto dire che queste si condurranno come se non fosser dentate.

Ora, vi ha una infinità di curve differenti che soddisfanno a questa condizione, anzi, presa ad arbitrio la curva di uno degli sproni, è sempre possibile di trovar per l'altro una curva conveniente. Queste curve però non si adattano tutte egualmente bene ai bisogni della pratica, e quelle generalmente usate sono poche ed appartengono alla famiglia delle *epicicloidi*. Noi ricorderem brevemente la generazione di queste curve, e dichiareremo in che consista quella proprietà che le rende così atte alla trasmissione del moto equabile di rotazione.

136. Sulla circonferenza ADA' di un circolo fisso, che ha il centro in O (*fig.* 8) si faccia rotare il circolo mobile CM$p$, in guisa che tutti i punti della circonferenza di questo vengano successivamente ad applicarsi senza scorrimento sulla

circonferenza fissa, ed il centro C descriva intorno al centro O la circonferenza CC′C″ di raggio eguale alla somma dei raggi OA, CA del circolo fisso e del circolo mobile. Quando quest'ultimo sarà venuto nella posizione $a'm'p'$, il punto che prima si trovava in M a contatto con la circonferenza fissa, sarà passato in $m'$, e gli archi A$a'$, $a'm'$ dei due circoli saranno eguali in lunghezza. Nel passar così da M in $m'$, il punto che consideriamo avrà descritta la curva A$m'$, e continuando a far rotare il circolo mobile, finchè il medesimo punto M torni ad applicarsi sulla circonferenza fissa in A′, si otterrà la curva A$m'$E$m''$A′ simmetrica dalle due parti del raggio OD: questa curva dicesi *epicicloide*, e noi, per brevità di discorsi, chiameremo *deferente* il circolo fisso ADA′; *epiciclo* o circolo generatore il circolo mobile CM; *origine* della curva il punto A, dove i due circoli si toccavano al principio del movimento, e *base* di essa l'arco ADA′ del deferente, il qual arco è manifestamente eguale alla circonferenza intera dell'epiciclo.

Quando il raggio dell'epiciclo è minore di quello del deferente come nella *fig.* 8, la base ADA′ della epicicloide non occupa tutta la circonferenza del deferente; ma quando l'epiciclo è maggiore del deferente, come si vede nella *fig.* 9, il centro di esso, partendo dal punto C, ha da descrivere più che un giro intorno ad O, prima che il punto M, che da principio toccava la circonferenza fissa in A, torni a toccarla in un altro punto A′; allora l'epicicloide presenta in F un punto *doppio*, cioè una intersezione con sè stessa, e la base AA′DAA′ della epicicloide AF$m'$E$m''$FA′ è maggiore di una intera circonferenza del deferente.

Supponiamo che il raggio dell'epiciclo si faccia più grande ancora; la base della epicicloide potrà fare due, tre, quattro o più giri sulla circonferenza ADA′; finalmente se noi supponiamo che il raggio dell'epiciclo sia infinitamente grande, la base della epicicloide occuperà una infinità di giri, cioè la curva non verrà mai più ad incontrare la circonferenza del deferente. Or siccome un arco di circolo di raggio infinito si confonde con una linea retta, l'epiciclo sarà una linea retta e l'*epicicloide* si confonderà con la curva che nel capitolo dodicesimo, § 81, abbiamo chiamata *evolvente* del circolo, e che abbiamo disegnata nelle *figg.* 3, 4, 5 e 6 della *tav.* 7.

Invece di far crescere all'infinito il raggio dell'*epiciclo*, supponiamo ora che questo abbia una grandezza qualunque, ma che il deferente sia infinitamente grande; una porzione qualunque della sua circonferenza si confonderà allora con una linea retta ABA′ (*tav.* 13, *fig.* 1), e la curva A$m'$EA′ sarà una *cicloide* ordinaria; poichè così si chiama, come è noto, la curva generata da un punto della circonferenza di un circolo, che giri sviluppandosi senza scorrimento sopra una linea retta.

Quando i due circoli si toccano, porgendosi uno la convessità e l'altro la concavità, cioè quando uno è contenuto nell'altro, prendendo il circolo interiore per epiciclo, esso potrà farsi rotare nella concavità del circolo esteriore che sarà il deferente, come nella *fig.* 4 della *tav.* 13; oppure, prendendo per epiciclo il circolo maggiore, si potrà far rotar questo con la sua concavità sempre tangente al circolo interiore che allora sarà il deferente, come nella *fig.* 3. Le curve generate in questi due casi sono della medesima natura che quelle finquì considerate, ma prendono più particolarmente il nome di *ipocicloidi*.

È notabile il caso, in cui il diametro dell'epiciclo interno è eguale al raggio del deferente, poichè allora, la ipocicloide generata è una linea retta, e si confonde col diametro condotto nel deferente per l'origine della curva. Per dimostrar ciò supponiamo che il circolo OGAH, che ha il suo diametro eguale al raggio OA del circolo fisso ADA′F (*fig.* 2), supponiam, dico, che il circolo OGAH sia passato in un'altra posizione qualunque O$m'a'$. Portando sulla sua circonferenza un arco $a'm'$ eguale in lunghezza all'arco A$a'$, il punto $m'$

dovrà trovarsi sulla ipocicloide descritta dal punto di primitivo contatto $m$; ora io dico che questo punto $m'$ verrà di necessità a cadere sul diametro AOA'; e lo stesso potendo dimostrarsi per qualunque altra posizione del circolo generatore, ne segue che tutti i punti della curva descritta si troveranno sul diametro AOA', cioè che questo diametro medesimo sarà la *ipocicloide* generata dal movimento del punto $m'$.

Infatti i due archi $a'$A ed $a'm'$ essendo per ipotesi di eguale lunghezza, il primo conterrà due volte meno gradi che il secondo, poichè il suo raggio è due volte più grande. Dunque l'angolo $a'$OA, che ha per misura l'arco A$a'$, è eguale all'angolo $a'$O$m'$ che ha per misura la metà dell'arco $a'm'$; la retta O$m'$ coincide col raggio OA, ed il punto $m'$ cade su questo, e per conseguenza anche sul diametro AA': che è ciò che si voleva dimostrare (1).

(1) La costruzione grafica della epicicloide, espressa nella *fig.* 5, *tav.* 13, e spiegata nel § 139, ci condurrà a formare l'equazione polare di questa curva. Dicansi $a$, $b$ i raggi OB, CB del deferente e dell'epiciclo, e prendansi il centro O del primo per polo, ed il raggio OB condotto alla metà della base AA' per linea fissa, onde siano $Od'' = r$, e $Dod'' = \theta$ le coordinate del punto $d''$ della curva. Siano ancora $DOa'' = \psi$, $D''c''d'' = \varphi$; tra i quali due angoli, per essere di eguale lunghezza i due archi $Ba''$, e $Db'' = D''d''$, si avrà la relazione

$$b\varphi = a\psi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Nel triangolo $Oc''d''$ essendo i tre lati $Oc'' = a + b$, $c''d'' = b$ ed $O''d'' = r$; e gli angoli $c''Od'' = \theta - \psi$, $Oc''d'' = \pi - \varphi$, avremo

$$r^2 = (a+b)^2 + b^2 + 2b(a+b)\cos\varphi\,, \quad \text{ossia}$$

$$r^2 = a^2 + 2b(a+b)(1+\cos\varphi)\,, \quad \text{od ancora}$$

$$r^2 = a^2 + 4b(a+b)\cos^2\frac{1}{2}\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

$$r\sin(\theta-\psi) = b\sin\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

$$(a+b)\sin(\theta-\psi) = b\sin(\psi+\varphi-\theta) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

La epicicloide AD''DA' sarà dunque rappresentata da tre qualunque

137. Tutte le curve epicicloidali, di cui abbiamo passate a rassegna le diverse specie, godono di una proprietà comune, che è quella appunto che le rende proprie alla trasmissione equabile del moto circolare. Riportandoci alla *fig.* 8, *tav.* 12, consideriamo il circolo generatore od epiciclo arrivato nella posizione $a''m''p''$, nella quale il punto $m$ di primitivo contatto (che è quello che descrive la curva), è giunto in $m''$: se da questo punto noi condurremo le due corde $m''a''$, $m''p''$, l'una al punto di contatto dell'epiciclo col deferente, l'altra all'altra estremità del diametro condotto per $a''$; queste due

fra queste quattro equazioni, o da quella che se ne trarrebbe eliminandone gli angoli ausiliari $\varphi$ e $\psi$.

Le medesime equazioni varranno pure per la ipocicloide, facendovi la $b$ negativa; se poi, nella medesima ipotesi faremo ancora $2b = a$,

la equazione (1) diverrà $\varphi = 2\psi$;

la (2) darà $r = a \sin \frac{1}{2} \varphi = a \sin \psi$;

e la (3) $r \sin(\theta - \psi) = \frac{1}{2} a \sin \varphi$;

ossia a motivo del precedente valore di $r$

$$\sin(\theta - \psi) = \cos \psi \; ; \quad \text{onde} \quad \theta = \frac{1}{2}\pi \; ;$$

e la ipocicloide si confonderà col diametro del deferente perpendicolare alla linea fissa OB.

Nelle generali equazioni (2) e (3) ponendo $a = \infty$ esse debbono divenire identiche con quelle che convengono alla cicloide ordinaria; allora infatti l'arco AA' si muterà in linea retta; ora prendendo questa e la BD per assi delle $y$ e delle $x$, dovranno farsi

$$r - a = x \; , \quad r \sin \theta = y \; ;$$

gli angoli $\psi$ e $\theta$ saranno nulli, onde $\cos \psi = \cos \theta = 1$; ed a motivo di $r = \infty$, $r \sin \psi = r\psi = a\psi = b\varphi$; e quindi le equazioni (2) e (3) si mutano nelle

$$x = b(1 + \cos \varphi) \; , \quad y = b(\varphi + \sin \varphi) \; .$$

Per mostrare come nelle equazioni generali delle epicicloidi sieno pur corde saranno perpendicolari tra loro, poichè l'angolo $m''$ è inscritto in un semicircolo. Ora, mentre si fa rotar l'epiciclo, il suo punto $m''$ tende a descrivere un arco di circolo intorno al punto $a''$ come centro; la retta $m''a''$ si confonde adunque con la direzione del raggio di curvatura della epicicloide, e per conseguenza è normale a questa curva, e la retta $m''p''$, perpendicolare ad $m''a''$, è tangente alla curva medesima. Quindi si conclude, che in qualunque epicicloide la normale passa costantemente pel punto nel quale si toccano il circolo generatore ed il circolo mobile, e con un po' di attenzione si riconosce l'esattezza della regola seguente:

comprese quelle della evolvente di circolo, mutiamo prima le coordinate, col prendere per linea fissa il raggio OA condotto all'origine A della curva, la qual cosa faremo col porre

$$\psi=\frac{b\pi}{a}-\psi' , \quad \theta=\frac{b\pi}{a}-\theta' , \quad \varphi=\pi-\varphi' ;$$

ed avremo $b\varphi'=a\psi'$ ......................................(I).

$$r^2=a^2+4b(a+b)\sin^2\frac{1}{2}\varphi' \quad \text{(II)}.$$

$$r\sin(\psi'-\theta')=b\sin\varphi' \quad \text{(III)}.$$

$$(a+b)\sin(\psi'-\theta')=b\sin(\psi'+\varphi'-\theta') \quad \text{(IV)}.$$

Per la evolvente di circolo debbono supporsi $b=\infty$, $\varphi'=o$, e per conseguenza

$$b\sin\varphi'=b\varphi'=a\psi' , \quad b\sin\frac{1}{2}\varphi'=\frac{1}{2}b\varphi'=\frac{1}{2}a\psi' ;$$

e trascurando dappertutto $a$ rispetto a $b$, le equazioni (II) e (III) divengono

$$r^2=a^2(1+\psi'^2) ; \quad r\sin(\psi'-\theta')=a\psi' .$$

Ed eliminando $\psi'$ tra queste due si ottiene

$$\theta'=\frac{1}{a}\sqrt{r^2-a^2}-\text{arc}\left(\cos=\frac{a}{r}\right) ;$$

la quale, posto $a=1$, è la medesima della nota al § 81.

Per condurre la normale ad un dato punto $m'$ di una epicicloide $Am'Em''A'$ (*fig.* 8, *tav.* 12), si descriva la circonferenza $CC'C''$ concentrica al deferente e di raggio AC eguale alla somma dei raggi $Oa$, $aC$ del deferente e dell'epiciclo: si faccia poi centro nel dato punto $m'$ della curva, e con raggio $m'C'$ eguale a quello dell'epiciclo si tagli in $C'$ la circonferenza $CC'C''$. Finalmente pel punto $C'$ e pel centro O del deferente si conduca la retta $C'O$, che incontri in $a'$ la circonferenza del deferente; la retta $m'a'$ condotta dal punto $m'$ al punto $a'$ sarà la domandata normale.

Le *figg.* 1, 3 e 4 della *tav.* 12 fanno vedere l'applicazione di questa regola ai casi della cicloide ordinaria e della ipocicloide. Ritornando alla *fig.* 6, *tav.* 7 ed al capitolo dodicesimo, si vedrà che la regola che abbiamo allora insegnata per condurre una normale alla evolvente di circolo si trova compresa in questa più generale, di cui ora parliamo; poichè la *evolvente* del circolo, essendo una epicicloide descritta da un epiciclo di raggio infinito, cioè da una linea retta, la corda condotta da un punto della curva al punto di contatto si confonde con la retta generatrice medesima (1).

(1) Differenziando l'equazione (2) della nota precedente si trova

$$-\frac{r\,dr}{d\varphi}=b(a+b)\sin\varphi\ ;$$

e differenziando la (3), dopo di averla risoluta rispetto a $\theta$, poi riducendo per mezzo della (2)

$$\frac{r^2 d\theta}{d\varphi}=\frac{2b(a+b)(a+2b)}{a}\cos^2\frac{1}{2}\varphi\ ;$$

e quindi

$$\frac{-dr}{r\,d\theta}=\frac{a}{a+2b}\tan g\frac{1}{2}\varphi=\tan g\,\lambda\,,$$

detto $\lambda$ l'angolo che la normale alla epicicloide fa col raggio vettore $r$.

Ora conducendo dal punto $m''$ della curva (*tav.* 12, *fig.* 8) la retta

138. Quando un cono mobile DAE (*tav.* 8, *fig.* 20) si fa rotolare sopra un cono fisso EAF, in modo che i due coni abbiano sempre i loro vertici nello stesso punto A, tutti i punti della circonferenza della base DE stanno sempre sopra la superficie di una sfera, che ha il suo centro nel vertice comune A dei due coni. Ora, tenendo dietro al movimento di un punto qualunque di questa circonferenza, per esempio del punto E, si vedrà facilmente che esso descrive sulla superficie della sfera una curva somigliante a quelle che abbiamo finora considerate, e che chiamasi per questa ragione *epicicloide sferica*. Essa gode di una proprietà analoga a quella che è comune a tutte le epicicloidi piane, potendosi dimostrare

$m''a''$ al punto di contatto dell'epiciclo col deferente, ed il raggio $m''C''$ dell'epiciclo, si ha

$$\text{ang}\, m''C''p'' = \varphi\,, \qquad \text{ang}\, m''a''C'' = \frac{1}{2}\varphi\,;$$

dunque, ergendo in O la $Oq$ perpendicolare sulla $OC''$, e prolungando $m''a''$ in $q$

$$Oq = a \,\text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi\,;$$

e tirando pel punto $q$ le $qp''$

$$\text{tang}\, Op''q = \frac{a \,\text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi}{a + 2b} = \text{tang}\,\lambda\,.$$

Ma i due triangoli rettangoli simili $m''a''p''$, $Oa''q$, danno

$$a''p'' : a''q :: a''m'' : a''O\,;$$

son dunque anche simili i due triangoli $a''p''q$, $a''m''O$, epperò l'angolo $a''m''O$ è eguale all'angolo $Op''q$: ma quest'ultimo è eguale all'angolo $\lambda$; dunque la normale coincide con la retta $m''a''$.

Cerchiamo ancora l'espressione del raggio di curvatura della epicicloide. È noto che per qualsivoglia curva questo si ottiene dividendo l'elemento dell'arco per l'angolo di contingenza; ora l'elemento dell'arco sarà $\frac{r\,d\theta}{\cos\lambda}$, e l'angolo di contingenza $= d\lambda + d\theta$; ma nella *fig.* 8, *tav.* 12

che il piano normale ad un suo punto qualunque passa pel punto di contatto del circolo generatore, cioè della base del cono mobile, col circolo deferente, o base del cono fisso. Il lato AE, condotto al punto descrivente del cono mobile, essendo una retta che passa continuamente per lo stesso punto A, cioè pel vertice, questo lato nel movimento del cono ADE genererà una superficie conica, che avrà per base l'epicicloide sferica descritta dal punto E, e per vertice il punto A.

Noi abbiam considerate finquì le curve generate dalla rotazione di circoli sopra circoli; ma è manifesto che queste non sono a gran pezza le sole che possano ottenersi in modo analogo; poichè facendo similmente rotare una curva qua-

si vede che, essendo $a''Om'' = \theta - \psi$, ed $Om''a'' = \lambda$, sarà $qa''O = \theta + \lambda - \psi$; e questo angolo essendo opposto al vertice con $C''a''m'' = \frac{1}{2}\varphi$, avremo

$$\theta + \lambda = \psi + \frac{1}{2}\varphi = \frac{a+2b}{2a}\varphi,$$

epperò il raggio di curvatura sarà

$$\rho = \frac{r}{\cos\lambda} \cdot \frac{2a}{a+2b} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Ora, a motivo di

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{a}{a+2b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi, \quad \text{trovasi} \quad \frac{1}{\cos\lambda} = \frac{r}{(a+2b)\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

e si ha d'altronde, come abbiam veduto,

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2b(a+b)(a+2b)}{ar^2}\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Sarà dunque finalmente

$$\rho = \frac{4b(a+b)}{a+2b}\cos\frac{1}{2}\varphi;$$

della quale espressione ci occorrerà di far uso in uno de' capitoli seguenti.

lunque BAB′ (*fig.* 6., *tav.* 13) sopra un'altra curva LAA′, un punto della prima, per esempio il punto A, descriverà una terza curva AEMD che sarà pure una curva epicicloidale, e che godrà rispetto alle sue normali della medesima proprietà che abbiamo sopra enunciata. Così quando la curva generatrice BAB′ sarà passata nella posizione $a$M, ed il punto descrivente A sarà venuto in M, conducendo da questo punto la retta M$a$ al punto di contatto $a$ della curva generatrice con la curva fissa LAA′, sarà M$a$ normale in M alla curva AMD (1).

(1) Alla curva deferente LAA′ intendasi sostituito il suo circolo osculatore, e sia O il centro di questo, ed $Oa = a$ il suo raggio. Si sostituisca similmente alla curva mobile $a$M il suo circolo osculatore, e sia C il centro di questo, $aC = b$ il suo raggio; finalmente dal centro C conducasi la retta $CM = c$ al punto generatore M. Facendo rotare sul circolo O il circolo C, e insieme con esso la retta CM, il punto M descriverà una curva, la quale per un brevissimo tratto contiguo al punto M si confonderà con quella generata dalla rotazione della curva $a$M sulla LAA′, ed avrà per conseguenza la medesima tangente, e la medesima normale di questa.

Or quando si fa rotare il circolo C sul circolo O, il punto M può considerarsi come animato da due movimenti contemporanei di rotazione, l'uno intorno al punto C, l'altro intorno al punto O; poichè passando il punto $h'$ dell'epiciclo a contatto col punto $h$ del deferente, il circolo C descrive intorno al proprio centro l'angolo $aCh'$, ed il punto M descrive perpendicolarmente a CM un archetto di circolo $= \frac{c}{b} \cdot \overline{ah'}$. Ma nel tempo stesso il centro C descrive pure intorno al punto O l'archetto C$c$ che sottende l'angolo $aOh = \frac{\overline{ah}}{a}$, ed il punto M descrive perpendicolarmente al raggio vettore $OM = r$ un archetto $= \frac{r \, . \, \overline{ah}}{a}$. Questo punto M trovasi dunque contemporaneamente animato secondo le direzioni MQ, MI, rispettivamente perpendicolari ad MC, MO, da due velocità le quali stanno tra di loro come $\frac{c \, . \, \overline{ah}}{b} : \frac{r \, . \, \overline{ah}}{a}$ ossia $:: \frac{ac}{b} : r$; epperò la sua direzione assoluta, che sarà pur quella della tangente MT, coinciderà con la diagonale del parallelogramma costrutto sui lati

139. Per poter applicare le curve epicicloidali alla costruzione delle ruote dentate, che darà argomento ai capitoli seguenti, è necessario saper disegnare in modo spedito ed esatto ogni epicicloide di cui sieno dati il deferente, l'epiciclo e l'origine; la qual cosa può farsi come segue:

Sia (*tav.* 13, *fig.* 5) O il centro del deferente, C quello dell'epiciclo supposto in quella posizione, in cui il punto di contatto B delle due circonferenze si trova nel punto di mezzo della base ABA' della epicicloide domandata. Dividasi la semicirconferenza dell' epiciclo in qualsivoglia numero di parti eguali, ne' punti $b'$, $b''$, $b'''$, $b^{\text{iv}}$.....; dividasi pure nello stesso numero di parti eguali la mezza-base BA della epicicloide ne' punti $a'$, $a''$, $a'''$, $a^{\text{iv}}$....., ponendo cura di collocare le lettere accentate nell' ordine in cui si veggono nella figura. Per ottenere un punto della curva domandata, ad uno dei punti di divisione del deferente, per esempio al punto $a''$, conducasi il raggio O$a''$ e si prolunghi indefinitamente al di fuori; poi fatto centro in O, e con raggio O$b''$, descrivasi l'arco indefinito di circolo $i''b''l''$....., e notisi il punto $l''$, ove quest'arco taglia il prolungamento del raggio O$a''$; finalmente fatto centro in questo punto $l''$, e con raggio eguale alla distanza $i''b''$, taglisi in $d''$ l'arco indefinito $i''l''$; sarà il punto $d''$ un punto della epicicloide domandata. Nello stesso

MQ, MI che stieno nella ragione or espressa; e per conseguenza ancora la normale coinciderà con la diagonale del parallelogramma costrutto sulle direzioni MC, MO, e con lati che stieno nella stessa ragione. Tirisi ora la M$a$, e si prolunghi fino all'incontro di OS parallela ad MC, sarà manifestamente $\mathrm{OS} = \frac{ac}{b}$; ed essendo $\mathrm{MO} = r$, sarà MS la normale domandata.

Non ci tratterremo a mostrare in qual modo, date le due curve AA', BB', si possa analiticamente determinare la curva epicicloidale AMD, non essendo necessario per la intelligenza delle cose che seguono questa determinazione analitica, la quale non ha d'altronde in se stessa alcuna difficoltà.

modo si determineranno altri punti $d'$, $d'''$, $d^{iv}$, $d^{v}$, pei quali facendo passare una curva continua, la quale si spicchi dal punto A e venga a terminare in D, sarà dessa la metà della epicicloide proposta.

Se questa si vorrà segnare approssimativamente per mezzo di una serie di archi di circolo, si conducano le rette $d'a'$, $d''a''$, $d'''a'''$, ...... $d^{v}a^{v}$; ed all'origine A si tiri la tangente alla circonferenza del deferente. Tutte queste rette saranno normali alla epicicloide, e per conseguenza i punti $h$, $h'$, $h''$..... $h^{v}$ in cui esse successivamente si tagliano, potranno riguardarsi come i centri di curvatura degli archi D$d'$, $d'd''$, $d''d'''$, ..... $d^{v}$A della curva; epperò fatto centro in $h$ con raggio $h$D, si descriverà il primo arco D$d'$; si farà poi centro in $h'$, e con raggio $h'd'$ si descriverà il secondo arco $d'd''$; e così via via finchè si giunga all'origine A della curva.

La medesima costruzione valendo per tutte le specie di epicicloidi piane, cioè ipocicloidi, cicloidi ed evolute di circolo, noi lascieremo al lettore la cura di farne a queste l'applicazione.

## CAPITOLO VENTESIMOPRIMO

### USO DELLE EPICICLOIDI
### PER LA TRASMISSIONE DEL MOVIMENTO EQUABILE DI ROTAZIONE.

140. Con la scorta delle cose esposte nel capitolo precedente, noi possiamo ora accingerci con successo alla ricerca delle forme più convenienti pel contorno dei denti, bocciuoli, palmole o sproni destinati alla trasmissione del moto equabile di rotazione fra assi paralleli o non paralleli. Questo problema ammette varie soluzioni, e noi cominciando dalla più semplice, verremo di mano in mano sollevandoci alla più compiuta e più generale.

Siano in prima due assi paralleli tra loro, e siano A, B (*tav.* 14, *fig.* 1) i punti, ove questi assi incontrano il piano delle due ruote; od in altre parole, siano A, B i centri delle due ruote. Si tiri la retta AB, e si divida in due parti AT, BT reciprocamente proporzionali alle velocità angolari, ossia ai numeri dei giri che le ruote debbono fare nello stesso tempo, operando in tutto come se esse dovessero condursi per semplice attrito di sviluppo, e secondo abbiamo insegnato nel capitolo quattordicesimo. Si descrivano i due circoli T*ta*, T*mb*, che saranno i *circoli primitivi* delle due ruote; per armare le loro circonferenze di denti o bocciuoli atti a trasmettere il movimento equabile di rotazione potremo scegliere una qualunque delle cinque soluzioni che siamo per esporre.

141. *Soluzione prima* (*fig.* 1). Essendo A il centro della ruota conduttrice, B il centro della ruota condotta e T il punto di contatto dei loro circoli primitivi, si faccia rotare il circolo primitivo BT sulla circonferenza del circolo

primitivo AT, e si segni l'epicicloide TH descritta in questo movimento dal punto T; poscia sulla circonferenza della ruota B s'intenda piantato perpendicolarmente al piano di essa uno spillo sottilissimo nel punto T, ed alla circonferenza dell'altra ruota ed in un piano un po' più alto di quello della ruota B si fermi una palmola, il cui contorno abbia la forma dell'epicicloide TH. Girando la ruota conduttrice A, la palmola TH sospingerà innanzi lo spillo T, e la ragione delle velocità angolari delle due ruote sarà costante e la medesima, come se esse si conducessero per semplice attrito.

Infatti supponiamo la palmola TH pervenuta nella posizione *th*, cioè supponiamo che la circonferenza della ruota A abbia descritto lo spazio T*t*; l'ago T della seconda ruota sarà venuto in *m*, e per la proprietà della epicicloide la normale GG' alla curva *hmt* nel punto *m* verrà passare pel punto T, qualunque sia la grandezza dell'arco T*t* descritto dalla ruota A; questa normale dividerà dunque sempre la retta AB nella stessa ragione in tutte le successive posizioni della macchina, e per conseguenza la ragione delle velocità angolari sarà sempre la stessa.

Oppure: la curva *th* della palmola essendo identicamente la stessa che TH, è la epicicloide descritta dal punto *m* nella rotazione del circolo B sul circolo A; l'arco T*m* è dunque eguale all'arco T*t* sul quale esso si è sviluppato; le due circonferenze descrivono dunque spazi eguali nello stesso tempo, precisamente come se si conducessero per semplice contatto.

La lunghezza della palmola essendo necessariamente limitata, la trasmissione del movimento cesserà quando l'estremità H di essa sarà giunta in K sulla circonferenza della ruota condotta, ed avrà spinto l'ago T sino a questo medesimo punto K: quindi

1° Data la lunghezza della palmola per conoscere l'ampiezza dell'arco ch'esso potrà far descrivere alla ruota condotta B, dal centro A della ruota conduttrice, e con raggio

AH si descriva un arco HK: il punto K dove quest'arco taglierà la circonferenza del circolo primitivo della ruota condotta sarà quello dove la palmola abbandonerà l'ago; e l'arco TK sarà lo spazio descritto dalla ruota condotta: quest'arco TK verrà da noi detto d'or innanzi l'*arco di azione* della palmola.

2° Viceversa, dato l'arco TK che la palmola debb'esser capace di far descrivere alla ruota B, si faccia centro in A, con raggio AK si descriva l'arco KH; il punto H, dove esso incontrerà il contorno della palmola, indicherà il luogo dove questa si dee troncare (1).

142. *Soluzione seconda* (*fig.* 2, *tav.* 14). Essendo sempre A il centro della ruota conduttrice, B il centro della ruota condotta, AT, BT i loro raggi primitivi, si descriva un terzo circolo TKB, tangente ai due primi in T, e di diametro TB

(1) Risulta dalla nota al § 136 che posti: $AT = a$ il raggio del deferente, ossia della ruota conduttrice; $BT = b$ quello dell'epiciclo, ossia della ruota condotta; $\varphi'$ l'angolo $m$BT che fanno in B i raggi A$m$, AT condotti l'uno al punto $m$ della epicicloide $tmh$, l'altro al punto di contatto T delle due ruote, il raggio vettore $Am = r$ avrà per sua espressione

$$r = \sqrt{a^2 + 2b(a+b)(1 - \cos\varphi')} .$$

Posto dunque che rappresentisi con $\beta$ l'angolo KBT sotteso dall'arco di azione KT, e con $h$ la lunghezza della palmola, sarà $a + h$ il valore del raggio vettore, $r$ corrispondente a $\varphi' = \beta$; epperò avremo tra $h$ e $\beta$ la relazione

$$h = \sqrt{a^2 + 2b(a+b)(1 - \cos\beta)} - a ;$$

la quale, dato l'arco di azione, farà conoscere il corrispondente valore della lunghezza della palmola; e viceversa, dato questo, avremo il valore di $\alpha$ dalla

$$\cos\beta = 1 - \frac{h(2a+h)}{2b(a+b)} .$$

eguale al raggio della ruota condotta. Si segni l'epicicloide TH generata dal punto T di questo circolo nel rotare sulla circonferenza del circolo primitivo della ruota conduttrice. Poscia sulla faccia della ruota B s'intenda inchiodata una riga col suo filo rettilineo lungo il raggio B*b*T, e sulla ruota A s'intenda fermata una palmola TH col suo contorno tagliato secondo l'epicicloide ora descritta; girando la ruota A, il contorno della palmola spingerà innanzi il filo della riga BT mantenendosi sempre ad esso tangente, ed il moto così comunicato alla ruota B sarà lo stesso, come se i due circoli primitivi si conducessero per solo contatto di sviluppo.

Abbia infatti la ruota A descritto l'angolo TA*t*, e sia il contorno della palmola passato nella posizione *tnmh:* il filo della riga, sempre diretto secondo un raggio della ruota B, sarà venuto in B*n* e toccherà la palmola in *m*, cioè nel punto dove esso contorno taglierà la circonferenza del circolo generatore T*m*B; poichè, secondo abbiamo veduto nel capitolo precedente, le due corde *m*B, *m*T condotte dal punto descrivente *m* alle due estremità del diametro BT, saranno l'una tangente, l'altra normale all'epicicloide. La *m*T sarà dunque la normale comune al punto di contatto della palmola e della riga, e passando essa costantemente pel medesimo punto T della linea dei centri, la ragione delle velocità angolari sarà costante, e la stessa come se le circonferenze primitive si conducessero per semplice attrito.

Cesserà il contatto tra la palmola e la riga, e cesserà la comunicazione del movimento, quando la punta H di quella sarà venuta in K sulla circonferenza del circolo generatore della epicicloide, cioè del circolo BKT di diametro BT; ed allora la riga avrà la posizione BKL, e la ruota condotta avrà descritto l'arco TL. Dunque

1° Data la lunghezza della palmola, per conoscere l'ampiezza dell'arco di azione, dal centro A e con raggio AH si descriva l'arco HK sino all'incontro della circonferenza del circolo di diametro BT; pel punto K così trovato si tiri il raggio BKL della ruota condotta; sarà TL l'arco cercato.

2° Viceversa, dato l'arco TL per cui la ruota B debb'essere condotta dalla palmola, si tiri il raggio BL, e si noti il punto K dov'esso incontra il circolotto di diametro BT; poi con centro A e raggio AK si descriva l'arco KH; esso segnerà sul contorno della palmola il punto H dove questa si dee troncare.

3° Il contatto della palmola con la riga, comincia nel punto T e finisce nel punto K; tutta la parte di riga da K sino in B non è dunque mai toccata dalla palmola, e per conseguenza è inutile, e si può sopprimere. Quindi, centro in B, raggio BK si descriva l'arco KF fino all'incontro della linea dei centri, sarà TF la parte di riga che si dee conservare (1).

(1) Detti qui pure $\beta$ *l'angolo d'azione* TBL (*fig.* 2, *tav.* 14) ed $h$ la lunghezza necessaria IH della palmola, si osservi che per essere il raggio dell'epiciclo metà soltanto di quello della ruota condotta, l'angolo $\beta$ sarà la metà del valore di $\varphi'$ corrispondente ad $r = a + h$, onde avremo

$$h = \sqrt{a^2 + b\left(a + \frac{1}{2}b\right)(1 - \cos 2\beta)} - a .$$

Quanto alla lunghezza utile KL del regolo essa sarà

$$h' = \mathrm{BL} - \mathrm{BK} = b - b\cos\beta = b(1 - \cos\beta) ;$$

epperò il punto F sarà nel piede della perpendicolare abbassata dall'estremità L dell'arco di azione sulla linea AB dei centri.

Se fossersi assunte ad arbitrio le lunghezze $h$, $h'$, le equazioni sovrascritte darebbero per $\beta$ le due espressioni

$$\cos 2\beta = 1 - \frac{h(2a + h)}{b\left(a + \frac{1}{2}b\right)} , \qquad \cos\beta = \frac{b - h'}{b} ;$$

e fra i due corrispondenti valori di $\beta$ dovrebbe evidentemente scegliersi il minore.

Queste due prime soluzioni sono le più importanti a conoscersi, perchè se ne fa continuo uso in pratica; esse vanno però soggette a due gravi incomodi, provegnenti da ciò che la forma di ciascuna palmola dipende non solamente dal raggio della propria ruota, ma eziandio da quello della ruota compagna, dal che consegue, che ciascuna ruota non può far giusto incastro se non con una ruota di raggio determinato; da questo sconcio vanno esenti le tre soluzioni che ora passiamo ad esporre, e che perciò possono in alcuni casi essere utilmente applicate.

143. *Soluzione terza* (*fig.* 3, *tav.* 14). A, B sono al solito i centri delle due ruote; AT, BT i raggi dei circoli primitivi; pel punto di contatto T di questi due circoli si conduca ad arbitrio la retta GG′, e dai centri A, B si calino sopra di essa le perpendicolari A*a*, B*b*, che saranno evidentemente proporzionali ai raggi primitivi AT, BT. Con queste perpendicolari come raggi si descrivano i due circoli *a*D*d*, *b*E, che chiameremo le *basi* delle due ruote; finalmente pel punto T si facciano passare le due curve DTF, ETH, che siano le evolventi dei due circoli *a*D*d*, *be*E. Se ora sulle due basi si fermeranno due palmole tagliate secondo la forma delle evolventi ora descritte, facendo girare la ruota A, la palmola DF sospingerà innanzi la palmola EH, ed il moto si comunicherà alla ruota B, precisamente come farebbe per semplice contatto tra le due circonferenze primitive.

Abbia infatti la base della ruota A descritto l'arco D*d*, cosicchè la curva DF sia venuta in *df;* l'altra curva EH sarà passata in *eh*, e così la base della seconda ruota avrà descritto l'arco E*e*, ed il punto di contatto delle due palmole sarà passato da T in *t* senza uscire dalla retta GG′, che per la dimostrata proprietà delle evolventi sarà normale alle due curve nel loro punto di contatto *t;* questa comune normale o linea di azione taglierà dunque sempre la linea dei centri nel punto T, e le velocità angolari delle due ruote in tutte le loro posizioni saranno sempre reciprocamente proporzionali ai raggi primitivi AT, BT, cioè saranno le stesse come se i circoli primitivi si conducessero per semplice contatto.

Ciò può ancora dimostrarsi in altro modo, mercè di ciò che è stato spiegato nel capitolo dodicesimo. Essendo DT evolvente dell'arco D*a*, quest'arco D*a* è uguale in lunghezza alla tangente T*a;* e similmente l'arco *dt* essendo evolvente di *da*, *da* è eguale a *ta;* dunque l'arco D*d*, differenza tra *ad* e *a*D, è eguale a T*t* differenza tra *at*, ed *a*T. Per la medesima ragione sull'altra ruota si ha *b*E eguale a *b*T, *be* eguale a *bt*, e per conseguenza *t*T eguale ad E*e*; i due archi D*d*, E*e* sono dunque entrambi eguali a T*t*, e per conseguenza sono eguali tra loro. Gli archi descritti nello stesso tempo dalle due basi sono dunque eguali; ma i raggi delle basi sono proporzionali ai raggi primitivi; dunque finalmente gli archi descritti nello stesso tempo dai circoli primitivi sono anche eguali tra loro, e questi circoli si muovono, come se si comunicassero il movimento per semplice contatto.

144. Nelle due prime soluzioni (*figg.* 1 e 2) la ruota A comincia a sospingere la ruota B allora soltanto che la curva della palmola arriva in T sulla linea de' centri; ma nella soluzione presente (*fig.* 3) le due palmole hanno cominciato a toccarsi ed a spingersi prima di venire nelle posizioni DTF, ETH; e con un poco di attenzione si vedrà che il loro contatto è dovuto cominciare in *a*, quando l'origine D della prima palmola passava per questo punto; e che nel muoversi delle due ruote questo contatto viene cangiando luogo sui perimetri delle due palmole, ma cade sempre in qualche punto della retta GG′, fintantochè l'origine E della seconda palmola sia giunta in *b*. Ora mentre l'origine D passa da *a* in D, i due circoli di base descrivono archi eguali tra loro ed eguali ad *a*T come abbiamo dimostrato; e similmente mentre l'origine della seconda palmola passa da E in *b*, i due circoli di base descrivono archi eguali tra loro ed eguali

a $Tb$; dunque dall'istante in cui le palmole cominciano a toccarsi in $a$, fino all'istante in cui si abbandonano in $b$, i due circoli di base descrivono ciascuno un arco eguale ad $a$T più $b$T, cioè eguale a tutta la retta $ab$. Di più si ha manifestamente

$$Ta : Tb :: Aa : Bb,$$

e quindi ancora

$$Ta : Tb :: AT : BT;$$

dunque nella trasmissione equabile del movimento rotatorio per via di evolventi di circolo, l'*arco di azione* si estende di qua e di là della linea dei centri, e la lunghezza totale di quest'arco misurata sulle circonferenze dei circoli di base è eguale alla lunghezza della comune tangente $ab$ a questi circoli. Chiamando poi *arco di accesso* e *arco di recesso* le due porzioni dell'arco di azione, descritte, la prima, mentre il punto di contatto passa da $a$ in T, la seconda, mentre passa da T in $b$, si conchiude dalla seconda delle proporzioni che precedono, che l'arco di accesso sta all'arco di recesso, come il raggio primitivo della ruota conduttrice sta al raggio primitivo della ruota condotta.

Affinchè però si verifichi questa proposizione è necessario che le palmole abbiano una sufficiente lunghezza, la quale si determinerà così: centro in A, raggio A$b$, si descriva l'arco $b$F fino all'incontro della palmola della ruota A; centro B, raggio B$a$, si descriva l'arco $a$H sino all'incontro della palmola della ruota B; i punti F, H saranno le estremità delle due palmole.

La forma di ciascuna delle curve DF, EH dipende unicamente dal raggio del circolo di cui essa è la evolvente, e niente affatto dal raggio dell'altro circolo, nè dalla distanza dei due centri A, B. Così, se dopo aver costrutte le due palmole nel modo indicato, noi allontaneremo alquanto più una ruota dall'altra, portando il centro B in $b$ (*fig.* 4), le due ruote non lascieranno perciò di condursi equabilmente come prima; la linea di azione $ab$ passerà in $a'b'$, e invece di tagliare la linea dei centri in T, la taglierà in $t$; ma i due segmenti $At$, $tb$ saranno sempre proporzionali ai raggi dei due circoli di base, e la ragione delle velocità angolari delle due ruote sarà sempre la reciproca dei loro raggi.

Per la medesima ragione dell'essere ciascuna palmola descritta in modo affatto indipendente dal raggio della ruota con la quale dee fare incastro, si vede che due ruote qualunque, purchè abbiano il medesimo passo, potranno sempre convenientemente accoppiarsi, senza che sia necessario, come nelle due prime soluzioni, che l'una ruota sia stata appositamente costrutta per affarsi con l'altra (1).

(1) Siano $a$, $b$ i raggi primitivi delle due ruote; $a_1$, $b_1$ i raggi di base; $\beta$ l'angolo GTB. Avremo

$$a_1 = a \sin\beta\ , \qquad b_1 = b \sin\beta\ ;$$

e le due parti $a$T, $b$T della comune tangente ai due circoli di base saranno

$$a\mathrm{T} = \text{arco}\ a\mathrm{D} = a\cos\beta\ , \qquad b\mathrm{T} = \text{arco}\ b\mathrm{D} = b\cos\beta\ ;$$

e per conseguenza l'angolo di accesso $a$AT considerato nella prima ruota, e l'angolo di recesso $b$BT considerato nella seconda avranno entrambi lo stesso valore $= \text{cotang}\,\beta$; e gli angoli descritti dalle due ruote, dal principio alla fine del contatto saranno rispettivamente

$$\frac{a+b}{a}\,\text{cotang}\,\beta\ , \quad \text{ed} \quad \frac{a+b}{b}\,\text{cotang}\,\beta\ .$$

Acciò però si verifichino queste formule è necessario che le lunghezze delle due palmole, cioè le distanze delle loro estremità dalle circonferenze dei circoli di base sieno almeno eguali alle seguenti espressioni di $h$ e di $h'$:

$$h = \sqrt{(a + b\cos^2\beta)^2 + b^2\sin^2\beta\cos^2\beta} - a\sin\beta\ ;$$

$$= \sqrt{a^2 + (2a+b)\,b\cos^2\beta} - a\sin\beta\ ;$$

$$h' = \sqrt{b^2 + (2b+a)\,a\cos^2\beta} - b\sin\beta\ .$$

145. *Soluzione quarta* (*fig.* 5, *tav.* 14) Uno stesso circolo di raggio qualunque $bT$ si faccia rotare successivamente sulla convessità del circolo primitivo della ruota conduttrice AT, e nella concavità del circolo primitivo della ruota condotta

Che se le lunghezze delle palmole fossero minori di $h$, $h'$ rispettivamente, chiamandole $k$, $k'$, dovrebbero pur sempre essere

$$k > a(1-\sin\beta)\ , \qquad k' > b(1-\sin\beta)\ ;$$

poichè altrimenti non vi sarebbe contatto o prima, o dopo della linea de' centri; supponendo adempiute queste condizioni, il contatto comincerà quando la punta della palmola $k'$ sarà venuta sulla comune tangente GG', la qual cosa avverrà ad una distanza $z$ dal punto T, data dalla formula

$$z = \sqrt{k'^2 + 2k'b\sin\beta} - b\cos\beta\ ;$$

cesserà poi il contatto quando la punta della palmola $k$ sarà venuta essa sulla comune tangente, alla distanza $z'$ dal punto T, essendo

$$z' = \sqrt{k^2 + 2ka\sin\beta} - a\cos\beta\ ;$$

e queste medesime espressioni di $z$ e di $z'$ esprimeranno pure le lunghezze degli archi di accesso e di recesso delle due ruote; lunghezze che potranno pure scriversi così:

$$z = \sqrt{k'^2 + 2k'b_1} - \sqrt{b^2 - b_1^2}\ ,$$

$$z' = \sqrt{k^2 + 2ka_1} - \sqrt{a^2 - a_1^2}\ .$$

Se ora si finge che i centri delle due ruote si allontanino l'uno dall'altro alla distanza $(a+b)(1+i) = AB'$ (*fig.* 4), ciò tornerà allo stesso come se, rimanendo invariati i raggi di base $a_1$, $b_1$, si fossero accresciuti i raggi primitivi $a$, $b$ mutandoli in $a(1+i)$, $b(1+i)$; e per conseguenza gli archi di accesso e di recesso delle due ruote nella loro nuova posizione diverranno

$$z_1 = \sqrt{k'^2 + 2k'b_1} - \sqrt{b^2(1+i)^2 - b_1^2}\ ;$$

$$z'_1 = \sqrt{k^2 + 2ka_1} - \sqrt{a^2(1+i)^2 - a_1^2}\ .$$

BT; esso genererà l'*epicicloide* TF e l'*ipocicloide* TH. Si fissi alla ruota conduttrice una palmola col contorno formato secondo la prima curva: ed alla ruota condotta un regolo col filo scavato secondo la forma della seconda curva: dico che la palmola sospingendo il regolo, il moto si trasmetterà con ragione costante tra le velocità angolari delle due ruote, come nelle precedenti soluzioni.

Infatti quando le due curve saranno giunte nelle rispettive posizioni $tf$, $nh$, esse incontreranno entrambe il circolo generatore od epiciclo $b$T nel medesimo punto $m$, poichè gli archi T$t$, T$n$ saranno entrambi eguali all'arco T$m$; poi, per la proprietà delle curve epicicloidali, la comune normale alle due curve in questo punto passerà costantemente pel punto di contatto T dei due circoli primitivi, onde ecc.

Se il raggio dell'epiciclo si supporrà eguale al raggio della ruota condotta, si ritornerà così alla prima soluzione; se si supporrà eguale alla metà di quel raggio, si ricadrà sulla seconda; e se il medesimo raggio si supporrà infinito, l'epiciclo si confonderà con una linea retta, e si ritroverà la soluzione quarta. Se l'arco di azione debb'essere eguale a TL, disegnando in LK$h$ la corrispondente posizione del regolo TH, e dai rispettivi centri A, B, coi raggi AK, BK descrivendo gli archi circolari K$f$F, KI, questi limiteranno le lunghezze utili TF della palmola, e TI del regolo (1).

(1) Posto qui il raggio $b$T dell'epiciclo $= c$, e detti sempre $\beta$ l'angolo di azione TBL, $h$ la lunghezza necessaria della palmola, ed $h'$ la lunghezza utile del regolo saranno

$$h = \sqrt{a^2 + 2c(a+c)\left(1 - \cos\frac{b\beta}{c}\right)} - a\ ,$$

$$h' = b - \sqrt{b^2 + 2c(a-c)\left(1 + \cos\frac{b\beta}{c}\right)}$$

146. *Soluzione quinta* (*fig.* 6, *tav.* 14). Una curva qualunque $Tmq$, si faccia successivamente rotare pel medesimo verso sulla convessità del circolo primitivo della ruota AT, e nella concavità del circolo primitivo della ruota BT, cosicchè ne nascano la curva epicicloidale TF e la curva ipocicloidale TH. Fermando alle due ruote una palmola ed un regolo tagliati secondo queste due curve, il moto si trasmetterà da una ruota all'altra con la stessa ragion costante tra le velocità angolari, che avrebbe luogo se i circoli primitivi si menassero pel solo contatto delle loro circonferenze. Ciò si dimostra come per le quattro precedenti soluzioni.

Questa soluzione, più generale delle quattro che precedono, le comprende tutte; poichè quando la curva generatrice sarà un circolo, la soluzione presente coinciderà con quella che precede, la quale contiene, come abbiamo veduto, le tre prime.

Invece di assumere arbitrariamente la curva generatrice, e di costruir poi quelle della palmola e del regolo, sarà più comodo in pratica il darsi ad arbitrio una di queste curve, e cercar poi la curva compagna; il che potrà farsi meccanicamente così:

Si taglino due assicelle $APp$, $BQq$ (*fig.* 7) in forma di settori dei due circoli primitivi, e si dispongano in modo che possano girare intorno a' loro centri rispettivi, menandosi per contatto delle loro circonferenze. Sopra una delle assi-

Prese poi ad arbitrio le lunghezze $h$ ed $h'$, si avranno per $\cos\frac{b\beta}{c}$ i due valori

$$\cos\frac{b\beta}{c} = 1 - \frac{h(2a+h)}{2c(a+c)},$$

$$\cos\frac{b\beta}{c} = \frac{h'(2b-h')}{2c(b-c)} - 1\ ;$$

e fra i corrispondenti valori di $\beta$ dovrà ritenersi il minore.

celle si fermi la sagoma LDF tagliata secondo quel contorno curvilineo DF che si vuol dare ai denti della ruota A, e si procuri che tra il piano dell'assicella e quello della sagoma passi liberamente un cartoncino GHIL fermato sull'altra assicella. Si faccia allora girare l'assicella A, e con essa per conseguenza anche la B, ed in molte successive e poco diverse posizioni dei due settori, si segni sul cartoncino la traccia del contorno DF, facendo scorrere lunghesso questo contorno la punta di una matita bene aguzzata. Si avranno così sul cartoncino molte curve che si taglieranno due a due; si descriva una curva EH che sia tangente a tutte queste, la qual cosa si farà assai facilmente, quando esse sieno abbastanza numerose; la curva così disegnata sarà la figura richiesta pel contorno del dente della ruota B. E per vero facendo girare equabilmente le due ruote con velocità angolari inversamente proporzionali ai loro raggi primitivi, risulta dalla costruzione stessa della curva EH ch'essa si manterrà sempre tangente alla curva DF; e per conseguenza tagliando i denti delle due ruote secondo le curve EH, DF, e facendo poi girare la prima ruota equabilmente, il moto trasmesso alla seconda, pel contatto dei due denti sarà sicuramente equabile.

Geometricamente poi si procederà così:

Siano AMA′, BMB′ (*fig.* 8) due archi delle circonferenze primitive delle due ruote, che si toccano in M, e sia EMF la curva data del dente della ruota AA′. Si segnino sopra ambe le circonferenze a destra ed a sinistra del punto M di contatto, i punti equidistanti 1, 2, 3, 4...., 1′, 2′, 3′, 4′....; I, II, III, IV...., I′, II′, III′, IV′..... Fatto centro in 1 si apra il compasso finchè l'altra sua punta descriva un arco di circolo tangente alla curva MF, e con la medesima apertura di compasso fatto centro in 1′ si descriva l'arco *aa′*; similmente, fatto centro in 2 si apra il compasso finchè l'altra sua punta venga a descrivere un arco tangente alla curva MF, e con la medesima apertura fatto centro in 2′ si segni l'archetto $a'a''$; e successivamente si segnino nello stesso modo gli archetti $a''a'''$, $a'''a^{iv}$..... Si passi poi dall'altra parte di M, e tenendo sempre la stessa regola si descrivano gli archetti di circolo $bb'$, $b'b''$, $b''b'''$, $b'''b^{iv}$..... Se si farà una curva che sia tangente a tutti gli archi così descritti, sarà questa la forma conveniente pel dente della ruota CD, affinchè essa sia equabilmente condotta, dal dente dato EF.

Questa costruzione si giustifica osservando, che la data curva EMF può sempre riguardarsi come una curva epicicloidale risultante dalla rotazione di una certa curva GHI, la quale rotoli sulla circonferenza primitiva AA'. Suppongasi questa curva generatrice venuta nella posizione rappresentata nella figura, sicchè essa tocchi nel punto 3 la circonferenza primitiva AA' ed il punto generatore sia passato da M in H; sarà allora la retta H3 normale in H alla curva epicicloidale EMF. Se poi la medesima curva GHI si facesse rotolare sulla concavità della circonferenza BB', in guisa che inizialmente il punto H coincidesse con M, pervenuta essa nella posizione in cui il suo contatto con BB' fosse in 3', la normale $a'''3'$ alla curva generata in questo movimento sarebbe manifestamente eguale ad H3, e farebbe col raggio 3'C l'angolo $C3'a'''$, eguale all'angolo O'3H, che la normale H3 alla curva EMF fa col prolungamento 3O' del raggio O3. Ma supponendo che le due ruote abbiano girato, finchè sieno in contatto i due punti 3, 3', i raggi O3, C3' si trovano sul prolungamento uno dell'altro, e per conseguenza le due normali H3, $a'''3'$ coincidono in tutti i loro punti, epperò le due curve $a^{iv}b^{iv}$, ed EF sono tra loro tangenti, venendo in contatto i punti $a'''$ ed H.

## CAPITOLO VENTESIMOSECONDO

### APPLICAZIONE DELLE SOLUZIONI PRECEDENTI ALLA COSTRUZIONE DELLE RUOTE DENTATE. — SOLUZIONE PRIMA.

147. Noi abbiam sempre supposto finquì, che ciascuna ruota dovesse portare una palmola sola; ora se così fosse veramente, la ruota conduttrice non potrebbe mai sospingere la ruota compagna più che per un certo tratto od arco, che abbiam chiamato *arco di azione*, e di cui abbiamo insegnato a determinare l'ampiezza. Al di là di quest'arco, sfuggendo la ruota condotta dal contatto della palmola conduttrice, ogni comunicazione di moto cesserebbe tra le due ruote, ed esse sarebbero per conseguenza inette a trasmettere un moto continuo di rotazione. A ciò si provvede col dare a ciascuna ruota più palmole o denti (e *denti* li chiamerem sempre in avvenire), anzi tanti che all'istante in cui una coppia di essi sta per isfuggire dal contatto, un'altra coppia tosto succeda a quella, e rinnovi l'azione, sospingendo la ruota condotta per un novello arco, e così senza fine.

Abbiam supposto di più che il movimento della ruota conduttrice dovesse farsi sempre pel medesimo verso, come per esempio da sinistra a destra, e che non fosse mai per occorrere di dover far dare indietro alle ruote; con questo supposto ci bastava tagliare un lato solo di ciascuna palmola secondo l'andamento di una delle curve prescritte, poichè essa doveva sempre toccare la palmola opposta da una parte sola. Ma se vorremo, come è affatto conveniente, che ogni ruota possa indifferentemente girare e trasmettere il movimento alla ruota vicina, così per un verso come per l'altro, i due lati del dente dovranno entrambi avere la conveniente figura, determinata in uno de' modi insegnati. Il capitolo presente avrà per oggetto d'indicare ordinatamente la serie delle operazioni grafiche da farsi per ottenere un compiuto disegno di un incastro di ruote dentate conforme alla prima delle soluzioni esposte nel capitolo precedente; dico un disegno tale da poterlo mettere fra le mani di un operaio intelligente, cui altro non resti da fare che da copiarne esattamente tutte le parti.

148. La prima cosa, dati i centri delle due ruote ed i numeri dei giri ch'esse debbono fare nello stesso tempo, sarà di determinarne i *raggi primitivi*, dividendo la linea o distanza dei centri in due parti reciprocamente proporzionali ai dati numeri di giri, e di determinar quindi i numeri dei denti delle due ruote. Già abbiam notato altra volta, che il dente di una ruota dovendo entrar nel vano tra due denti dell'altra, la somma delle larghezze di un dente e di un vano debb'essere la stessa nelle due ruote, e che questa somma è ciò che si chiama un *passo*. Il numero de' passi contenuti nella circonferenza è dunque eguale al numero dei denti, e quando due ruote fanno incastro, i numeri de' loro denti sono proporzionali alle lunghezze delle loro circonferenze, e per conseguenza sono proporzionali ai loro raggi. Descritte adunque le due circonferenze primitive, ciascuna di esse si dividerà in tante parti eguali, quanti denti dee aver la ruota; queste parti riusciranno eguali sopra i due circoli primitivi, e formeranno la lunghezza del passo.

Ogni passo dovrà dividersi ancora in due parti eguali o diseguali, una delle quali sarà la grossezza del dente, e l'altra la larghezza del vano. — I denti delle due ruote avendo a fare eguale sforzo, essi dovranno essere egualmente robusti e per conseguenza si faranno di grossezza eguale se sono della stessa materia e della stessa forma, diseguale se sono di materie o di forme differenti, essendo manifesto che la ruota di materia men resistente dovrà avere i denti più grossi.

Se fosse possibile tagliare i denti con perfetta accuratezza, basterebbe che la larghezza di ogni vano fosse precisamente eguale alla grossezza del dente che in esso dee entrare; ma questa rigorosa esattezza non essendo possibile in pratica, il vano dee farsi un po' più largo di quel che sia grosso il dente, ed è regola ricevuta presso i pratici, quand'essi debbono far incastrare due ruote della medesima materia, di dividere il passo in undici parti eguali, e di prenderne poi cinque per la grossezza del dente, e sei per la larghezza del vano. La stessa regola potrà valere anche per le *lanterne*, facendo il diametro del fuso eguale a $\frac{5}{11}$ del passo, purchè il fuso non sia troppo lungo; se no bisognerà accrescerne il diametro.

Supponiamo appunto che debba disegnarsi un incastro di una ruota con una lanterna; varrà qui la prima soluzione, e per camminare per gradi nel farne l'applicazione, noi trascureremo dapprincipio la grossezza dei fusi, considerandoli come semplici linee matematiche; ci sarà facile appresso il correggere il nostro disegno in modo da tener conto del diametro del fuso.

149. Sieno A, B (*tav.* 15, *fig.* 1) i centri della ruota e della lanterna; DD', CC' le loro circonferenze primitive; gli archi TD, TD'...., eguali tra loro ed a TC, TC'...., ed eguali al *passo;* sieno finalmente C, C'..... ecc. i punti della periferia della lanterna ove son fitti i fusi. Si faccia rotare il circolo B sul circolo A; il punto T descriverà l'arco di epicicloide TKL; dal punto D, distante un passo da T, si descriva un altro arco eguale di epicicloide DK, ma volto dalla parte contraria, fino all'incontro K con TK; sarà TKD il cercato profilo del dente della ruota, e ripetendolo tante altre volte, quanti sono i passi sulla circonferenza DD'...., si sarà disegnata la dentatura di una ruota atta a condurre equabilmente la lanterna CC'.....

La epicicloide TK$l$ si muta in cicloide quando il circolo deferente si cambia in linea retta; e diviene una evolvente di circolo quando si cambia in linea retta il circolo generatore od epiciclo. Quindi si comprende, che quando una *dentiera rettilinea* (*fig.* 2) dovrà condurre una lanterna, il contorno dei denti di quella sarà formato di due archi opposti della cicloide generata dal circolo primitivo della lanterna; e che quando un rocchetto ad ali dovrà condurre una rastrelliera (*fig.* 3), la curva del suo dente si confonderà con la evolvente della sua circonferenza primitiva.

Posson pure costruirsi ruote e lanterne *annulari* (§ 125, *fig.* 4 e 5) cioè si può ad un rocchetto a sprone o ad ali accoppiare una lanterna, che lo abbracci nella sua circonferenza; oppure ad una lanterna una ruota dentata internamente, che le comunichi il movimento. In ambi i casi i circoli primitivi avranno un contatto interno, cioè volgeranno al punto di contatto l'uno la sua convessità, l'altro la sua concavità; ed in ambi i casi la curva del dente della ruota conduttrice si otterrà facendo rotare sulla circonferenza del suo circolo primitivo quella del circolo primitivo della lanterna ch'essa dee condurre.

150. Affinchè il moto non soffra interruzione è necessario, all'istante in cui un dente della ruota abbandona il fuso corrispondente della lanterna, che un altro dente aggrappi od abbia aggrappato un altro fuso; ora il dente TKD abbandonerà evidentemente il fuso C quando questo sara giunto in O, dove la circonferenza descritta dalla punta K del dente incontra la circonferenza primitiva della lanterna; bisogna dunque che quando il fuso C giungerà in O, il fuso seguente sia già arrivato in T sulla linea dei centri; bisogna cioè che l'arco di azione TO sia maggiore del passo TC, come appunto succede nella *fig.* 1. Ma se si volesse diminuir di molto il numero dei denti della ruota, o quello dei fusi della lanterna, potrebbe avvenire che questa condizione non fosse più adem-

piuta, e l'incastro allora sarebbe inetto a comunicare un moto continuo di rotazione.

Questa osservazione ci mostra, che non è permesso di diminuire oltre un certo segno il numero dei denti di una ruota, che debbe condurre una data lanterna; o quello dei fusi d'una lanterna, che debbe essere condotta da una data ruota. Essa si applica egualmente alle ruote e lanterne annulari, quando è dato il numero dei fusi o dei denti della ruota esteriore, e si ricerca quello dei denti o dei fusi della ruota interiore. Ma se al contrario fosse dato quest'ultimo numero, e si cercasse qual debbe essere quello de' denti o de' fusi della ruota e lanterna annulare, si avrebbe a cercare non già il minimo, ma bensì il massimo numero atto ad assicurare la continuità del movimento, essendo evidente, che tanto maggiore sarà l'arco di azione, quanto meno differiranno tra di loro i raggi primitivi delle due ruote. La costruzione testè insegnata basterà per riconoscere in ogni caso se i numeri assunti pei denti delle due ruote valgano ad assicurare la continuità del movimento. Ma per isparmiare la fatica di procedere a ciascuna volta per via di tentativi, si potrà ricorrere alla tavola seguente nella quale sono notati i minimi (o i massimi) numeri di denti o di fusi che possono essere efficacemente combinati tra loro.

## Tavola prima (1).

*Incastro d'una ruota con una lanterna di fusi lineari, cioè senza grossezza sensibile.*

| Ruota conduttrice. | | Lanterna condotta. |
|---|---|---|
| Ruota annulare | di 26 denti o meno......... | 3 fusi o più |
| — | di 27 denti o più .......... | 4 — |
| Dentiera o ruota | a sprone di 16 denti o più .... | 4 — |
| Ruota a sprone | di 15 a 8 denti............ | 5 — |
| — | di 7 oppure 6 denti ....... | 6 — |
| — | di 5 ..................... | 8 — |
| — | di 4 ..................... | 12 — |
| — | di 3 ............ | Rastrelliera o lanterna annulare di qualsivoglia numero di fusi. |

(1) Riportandoci alle formule (I), (II), (III) della nota al § 81, ed applicando al punto C della epicicloide DCK (*tav.* 15, *fig.* 1) le corrispondenti denominazioni, sarà $\psi'$ l'angolo DAT del passo TD della ruota conduttrice, e $\theta'$ l'angolo CAD, onde si fa manifesto che acciò la curva DK possa condurre il fuso C fino alla distanza di un passo dalla linea dei centri è necessario e basta che l'angolo $\theta'$ sia minore dell'angolo DAK, od al più eguale a quest'angolo; poichè se fosse maggiore sarebbe pure l'arco DC$>$ dell'arco DK, e la punta K del dente cadendo tra D e C, essa avrebbe abbandonato il fuso C prima che questo avesse percorso un passo intiero. Dee dunque al più al più essere

$$\theta' = \frac{1}{2}\psi' ,$$

e l'equazione (III) della nota citata diviene

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\sin\theta' = \sin\left(1+\frac{2a}{b}\right)\theta' .$$

Osservisi ora, che detti $n$, $n'$ il numero dei denti della ruota e quello

151. Le regole finquì esposte non sono immediatamente applicabili, perchè in esse si trascura la grossezza dei fusi supponendoli pure linee matematiche, mentre essi debbono necessariamente essere cilindri di diametro sensibile; ma è facile di compiere queste regole e di adattarle ai bisogni della pratica.

Sia (*tav.* 15, *fig.* 1) TP il raggio che si vuol dare ai fusi; da diversi punti della curva DCK precedentemente determinata si descrivano nell'interno del dente tanti archetti di circolo con raggio eguale al raggio TP del fuso, e si segni la curva PQ tangente a tutti questi archi; lo stesso si faccia per tutti gli altri denti; poi nei punti D, D'..... sempre col medesimo raggio TP o con raggio pochissimo maggiore si descrivano tante mezze circonferenze nell'interno della circonferenza primitiva; si avrà così il vero contorno della ruota.

dei fusi della lanterna, saranno questi numeri proporzionali ai raggi $a$ e $b$, e che di più avremo:

$$\theta' = \frac{\pi}{n} ;$$

onde la precedente equazione si muterà nella

$$\left(1 + \frac{n}{n'}\right) \sin \frac{\pi}{n} - \sin \left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n'}\right) = o .$$

I risultati consegnati nella tavola prima del testo sono stati dedotti da questa equazione di condizioni, assegnando successivamente ad $n$ o ad $n'$ valori assunti arbitrariamente, e cercando poi per via di sostituzioni successive due valori di $n'$ oppure di $n$, i quali dessero risultati di segni contrarii, e ritenendo il maggiore di questi due valori quando esso si riferiva ad una ruota *convessa*, ed il minore quando si riferiva ad una ruota *concava* ossia *annulare;* il lettore comprende che per applicare l'equazione sovrascritta al caso di una ruota annulare convien mutare in essa il segno di $n$; dovrebbe mutarvisi quello di $n'$ se si avesse da applicare all'incastro di un rocchetto con una lanterna annulare. Per una *dentiera* rettilinea sarà $n = \infty$: e sarà $n' = \infty$ per una *rastrelliera.*

Il lettore comprenderà facilmente da sè come si debba modificare la costruzione ora spiegata ne' casi di una ruota annulare, che conduce una lanterna collocata entro la sua circonferenza primitiva, e di una lanterna annulare condotta da un rocchetto interiore.

Quanto è maggiore il diametro dei fusi, e tanto più ne resta diminuita la grossezza del dente e la sua lunghezza, onde viene a diminuirsi anche l'ampiezza dell'arco di azione, e si fa necessario impiegare un numero di denti e di fusi differente da quello che converrebbe se i fusi non avessero diametro sensibile; a determinare in ogni caso questi numeri noi diamo qui le due tavole seguenti relative, la prima al caso che il diametro de' fusi si voglia fare eguale alla metà del passo, la seconda al caso che questo diametro eguagli i due quinti del passo soltanto. Queste tavole suppongono, che si conservi al dente tutta la lunghezza che risulta dalle operazioni grafiche sopra insegnate, e che per conseguenza esso termini in uno spigolo aguzzo; ma così conformato esso sarebbe troppo debole, e in breve tempo si logorerebbe mettendo la ruota fuori d'uso.

Sarà dunque bene in pratica di accrescere sempre il numero dei denti e quello dei fusi al di là di quel che portino le nostre tavole, quando trattisi di costruire ruote o lanterne convesse; e di diminuire invece questi numeri per le ruote o lanterne concave; poi di troncare le punte de' denti, riducendoli alla sola lunghezza necessaria.

### Tavola seconda.

*Incastro di una ruota e di una lanterna — Diametro de' fusi eguale alla metà del passo.*

| Ruota conduttrice. | Lanterna condotta. |
|---|---|
| Ruota annulare di 6 denti................. | 3 fusi o più |
| —— di 7 a 35 denti........... | 4 — |
| —— di 36 o più.............. | 5 — |
| Dentiera rettilinea....................... | 5 — |
| Ruota a sprone di 25 denti o più........... | 5 — |
| —— di 12 a 24 denti........... | 6 — |
| —— di 9 a 11 denti........... | 7 — |
| —— di 8 .................... | 8 — |
| —— di 7 oppure 6............ | 9 — |
| —— di 5 .................... | 13 — |
| —— di 4 .................... | 23 — |
| —— di 3 .... Lanterna annulare | 50 o meno |

### Tavola terza (1).

*Incastro di una ruota e di una lanterna — Diametro de' fusi eguale ai due quinti del passo.*

| Ruota conduttrice. | | Lanterna condotta. |
|---|---|---|
| Ruota annulare | di 8 denti o meno. . . . . . . . | 3 fusi o più |
| —— | di 9 a 160 denti . . . . . . . . . | 4 — |
| —— | di 161 denti o più. . . . . . . . . | 5 — |
| Dentiera rettilinea | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 5 — |
| Ruota a sprone | di 17 denti o più. . . . . . . . . . . | 5 — |
| —— | di 11 a 16 denti . . . . . . . . . . | 6 — |
| —— | di 8 a 10 . . . . . . . . . . . . . . . | 7 — |
| —— | di 6 oppure 7 . . . . . . . . . . . | 8 — |
| —— | di 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 11 — |
| —— | di 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 18 — |
| —— | di 3 . . . . Lanterna annulare | 120 fusi o meno |

(1) Ecco in qual modo si trovino le formule, mercè delle quali queste due tavole sono state computate.

Sia il fuso C (*fig.* 1, *tav.* 15) sul punto di essere abbandonato dal dente PQ*p*, dopo di essere stato condotto da esso alla distanza di un passo dalla linea de' centri ATB, sicchè la punta Q del dente sia tangente alla circonferenza del fuso. Essendo la corda CT normale alla epicicloide DCK, sarà pure, per costruzione, normale alla curva PQ del dente; epperò il punto di contatto Q cadrà sovra questa corda CT.

Dicansi sempre $AT = a$, $BT = b$ e siano inoltre

$\varphi$ l'angolo CBT del passo nella lanterna B;

$\xi$ l'angolo QAT corrispondente alla metà del passo nella ruota A, onde abbiasi $b\varphi = 2a\xi$;

152. Le lanterne furono generalmente impiegate in tutti i grossi meccanismi, fintantochè questi si costrussero esclu-

Sia finalmente $\rho$ il raggio CQ del fuso.

I triangoli $CmQ$, $ABm$ daranno:

$$Cm = CQ\,\frac{\sin CQm}{\sin CmQ} = \rho\,.\,\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \zeta\right)}{\sin(\varphi + \zeta)}\ ;$$

$$\frac{\sin BAm}{\sin AmB} = \frac{Bm}{AB}\ ;$$

ossia
$$\frac{\sin\zeta}{\sin(\varphi+\zeta)} = \frac{b - Cm}{a+b} = \frac{b - \rho\,\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \zeta\right)}{\sin(\varphi+\zeta)}}{a+b}\ ;$$

$$(a+b)\sin\zeta = b\sin(\varphi+\zeta) - \rho\cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \zeta\right)\ ;$$

e mettendo per $\varphi$ il suo valore $\frac{2a}{b}\zeta$,

$$(a+b)\sin\zeta = b\sin\frac{2a+b}{b}\zeta - \rho\cos\frac{a+b}{b}\zeta\ .$$

Se ora sieno $n$, $n'$ i numeri dei denti della ruota e dei fusi della lanterna, sarà $\zeta = \frac{\pi}{n}$; e prendendo per unità la lunghezza del passo sarà pure $2\pi a = n$, $2\pi b = n'$, onde l'equazione si muterà in quest'altra

$$(n+n')\sin\frac{\pi}{n} = n'\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n'}\right) - 2\pi\rho\cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n'}\right)\ ;$$

la quale si applicherà egualmente alle ruote ed alle lanterne annulari facendovi negativa la $n$, oppure la $n'$.

Per dedurre da questa formula i numeri delle tavole seconda e terza, si è dessa risoluta rispetto alla lettera $\rho$; poscia assunto ad arbitrio uno de'due numeri $n$, $n'$ si è venuto cercando quale fosse il valore dell'altro, che rendesse $\rho =$ oppure $> \frac{1}{2}$ per la prima tavola, e $\rho =$ oppure $> \frac{2}{5}$ per la seconda; e si è ritenuto il numero intero immediatamente superiore alla radice trovata, nel caso delle ruote a sprone, ed il numero intiero immediatamente inferiore per le ruote annulari.

sivamente di legno; ma dacchè a questo sono quasi universalmente sottentrati i metalli, le lanterne se ne sono andate meritamente in disuso a cagione degli inconvenienti cui vanno soggette, come tosto diremo. Tuttavia questi inconvenienti, assai gravi quando sì la ruota, che la lanterna sono convesse, si fanno assai minori allorchè l'una o l'altra di esse prende la forma annulare, e l'incastro che ne risulta può con successo impiegarsi ancora nella costruzione di molti meccanismi.

Le due osservazioni che seguono faranno comprendere quali sieno i vizii che si rinfacciano alla lanterna. In primo luogo si osserverà che mentre il dente della ruota conduttrice passa dalla posizione $P'Q'p'$ (*fig.* 1) alla posizione $PQp$ e sospinge il fuso da T in C, il punto del loro scambievole contatto, che da principio era in $p'$ alla radice del dente, si viene grado grado trasportando fino alla sua punta in Q, e percorre così sul perimetro del dente tutta la lunghezza dell'arco $pQ$: ma sulla periferia del fuso il movimento del punto di contatto è molto meno esteso, poichè il dente tocca sempre il fuso press'a poco nello stesso punto. Il dente adunque soffregando sul fuso opera quasi a modo di sega o meglio di lima, e in pochissimo tempo lo rode e lo consuma, e per conseguenza ne altera la figura, e allargando lo spazio che corre tra un fuso e l'altro, dà luogo ad un *gioco* da cui nascono poi continue e nocevoli scosse e traballii, come facilmente può ognuno riconoscere ne' mulini da grano, ed in altri simili grossolani meccanismi.

L'altra osservazione ci tratterrà un po' più lungamente. Tenendo dietro con attenzione alle posizioni successive, che prendono il dente della ruota conduttrice e il fuso della lanterna, si vedrà senza pena che il loro contatto comincia all'istante, in cui il centro del fuso si trova sulla linea AB dei centri delle ruote, e non prima; cioè a dire che il dente non esercita azione alcuna sul fuso prima di esser giunto sulla linea dei centri, od altrimenti ancora, che l'arco d'azione è tutto oltre alla linea dei centri, è tutto arco di *recesso*, e che non vi ha nissun arco di *accesso*.

Ma se noi volessimo che la lanterna diventasse essa la ruota conduttrice, e che la ruota a sprone fosse per conseguenza la ruota condotta, succederebbe manifestamente tutto il contrario; il fuso aggrapperebbe il dente assai prima di giungere alla linea dei centri, lo condurrebbe fino a questa linea e poi lo abbandonerebbe; cosicchè l'arco di azione non si estenderebbe al di là di quella linea, cioè non vi sarebbe arco di recesso, e l'arco intiero di azione sarebbe arco di accesso.

Ora è fatto costante che il fregamento, il quale si svolge fra i denti delle ruote prima della linea dei centri, è incomparabilmente più dannoso alla dolcezza del movimento ed alla durata delle ruote, che non sia quello che ha luogo dopo che i denti hanno oltrepassata quella linea. Può anzi avvenire in alcuni casi, che l'attrito innanzi alla linea dei centri sia bastante a rendere il movimento affatto irregolare e saltellante, od anche ad arrestarlo del tutto. È dunque sempre conveniente di fare, per quanto è possibile, che l'arco di accesso sia assai breve, e che le due ruote interamente o quasi interamente si conducano dopo la linea dei centri; e da ciò è facile conchiudere, che se l'uso delle lanterne può essere permesso quand'esse debbon servire come ruote condotte, esse sono assolutamente intollerabili come ruote conduttrici.

## CAPITOLO VENTESIMOTERZO

*Seguita la* COSTRUZIONE DELLE RUOTE DENTATE. — SOLUZIONE SECONDA.

153. La seconda delle soluzioni date nel capitolo ventesimoprimo per la trasmissione equabile del moto di rotazione suppone la ruota conduttrice armata di palmole curve, il cui lembo premendo contro il filo di un regolo rettilineo fermato sulla ruota condotta nella direzione del raggio di essa, comunichi a questo il suo movimento. Acciocchè meglio si intendano le cose che siamo per dire intorno al modo di applicare questa soluzione ai bisogni della pratica, noi seguiremo lo stesso metodo che abbiamo tenuto nel capitolo precedente, e supporremo a principio che i denti della ruota condotta non abbiano assolutamente nissuna grossezza sensibile, ma sieno pure linee matematiche convergenti nel centro; poi mostreremo come vadano corrette le conseguenze cui saremo condotti, a fin di tener conto della grossezza che i denti di necessità debbono avere, per poter effettivamente servire alla trasmissione del moto.

Sieno A, B (*fig.* 6, *tav.* 15) i centri delle due ruote, AT il raggio primitivo della ruota conduttrice, BT quello della ruota condotta. Sulle due circonferenze primitive e dalle due parti del punto T di contatto, si portino le distanze eguali al passo DT, TD'...., LT, TL'..... Ai punti L, T, L'..... della circonferenza della ruota condotta si tirino i raggi BL, BT, BL'...., e si concepisca questa ruota formata di un'anima circolare *ltl'*, di raggio B*t*, minore del raggio primitivo BT, e armata su tutto il suo contorno ad eguali intervalli di palette piane *l*L, *t*T, *l'*L'...., senza spessezza sensibile, e tra le quali debbono incastrarsi i denti conduttori. Per descrivere poi il contorno di questi denti, fatto centro in *b* alla metà del raggio BT, si segni la circonferenza B*m*T di diametro BT, la quale si faccia rotare sulla circonferenza primitiva TD, in modo che il punto che era a principio in T si muova descrivendo l'arco epicicloidale TK; darà questo la cercata curva del dente conduttore, e disegnando in DK un arco eguale ma volto in senso contrario, i due archi TK, DK col loro concorso in K daranno il profilo intiero del dente, il quale si ripeterà poi tante volte, quanti sono i passi DT, TD'...., sulla circonferenza primitiva della ruota conduttrice.

La ruota conduttrice AT si cangierà in dentiera rettilinea quando il raggio di essa diverrà infinitamente grande, cioè quando al suo circolo primitivo si sostituirà una retta tangente in T alla circonferenza primitiva della ruota condotta; ed allora l'epiciclo B*m*T rotando sovra questa retta genererà una cicloide ordinaria, che sarà la curva conveniente pel dente della dentiera. Similmente muterebbesi in dentiera la ruota condotta sostituendo alla sua circonferenza primitiva una retta tangente in T alla circonferenza della ruota conduttrice, cioè facendo infinitamente grande il raggio primitivo della ruota condotta. Ora in questo caso diverrebbe pure infinitamente grande il diametro dell'epiciclo B*m*T, essendo questo diametro eguale al raggio primitivo BT; muterebbesi cioè l'epiciclo in una linea retta tangente alla circonferenza del deferente; e la epicicloide si trasformerebbe in una evolvente di circolo.

Sì la ruota conduttrice, che la ruota condotta posson pure prendere la forma *annulare;* quando ciò avvenga alla ruota conduttrice, il contorno de' suoi denti sarà formato di tanti archi della *ipocicloide* generata da un epiciclo di diametro eguale al raggio della ruota condotta, il quale si faccia rotare nella circonferenza primitiva della ruota conduttrice. Quando al contrario si vorrà che sia *annulare* la ruota condotta, il diametro di essa dovrà eccedere il doppio di quello della ruota conduttrice; ed i denti di questa saranno formati di tanti archi di una curva epicicloidale della specie di quella rappresentata nella *fig.* 3, *tav.* 13, cioè generata da un epiciclo che rota toccando con la sua concavità la convessità del circolo primitivo della ruota conduttrice.

154. Abbiamo dimostrato a suo luogo, che il contatto tra la curva D$m$K ed il raggio che essa sospinge, si fa sempre in un punto della circonferenza dell'epiciclo B$m$T; quando adunque col girar della ruota conduttrice la punta K del suo dente sarà passata in $o$, il contatto avrà luogo in questo punto medesimo, e il dente sarà sul punto di abbandonare la paletta $l$L dopo di averla fatta passare dalla sua posizione primitiva $t$T alla posizione $r$O; quando l'arco TO della circonferenza primitiva della ruota condotta, cioè l'arco di *recesso*, sarà come nella nostra figura, maggiore del passo TL, prima che il dente TKD abbandoni la paletta $l$L, un altro dente TK'D' della ruota conduttrice sarà arrivato nella linea dei centri, ed avrà aggrappata un'altra paletta della ruota condotta, epperò non solamente il moto si trasmetterà in maniera continua da una ruota all'altra, ma il dente sarà più lungo del bisogno, e si potrà senza nuocere alla continuità del movimento mozzarne la punta, per mezzo di una circonferenza descritta dal centro A, la quale passi pel punto $m$ dove la curva del dente tocca la paletta $l$L, quando questa si trova alla distanza di un passo dal punto di contatto: la *fig.* 6 rappresenta i denti della ruota conduttrice così mozzati.

Ma assumendo arbitrariamente il numero dei denti e quello delle palette potrebbe avvenire, come abbiam veduto poter succedere nell'incastro di una ruota e di una lanterna, che la lunghezza del dente non riuscisse bastante a sospingere la ruota condotta per tutto un passo, ed allora la trasmissione del moto non potrebb'essere continua. La qual cosa dimostrasi, dover avvenire ogni volta che il numero delle palette della ruota condotta non superi, od almeno non eguagli il doppio del numero de' fusi che sarebbe necessario per una lanterna, la quale avesse da essere accoppiata alla ruota conduttrice data. Infatti dovendo, per la natura della epicicloide, il contatto tra il dente e la paletta cader sempre in qualche punto delle periferie dell'epiciclo, se l'arco di recesso dovrà essere di un passo, la punta del dente K (*fig.* 7) sarà sul punto d'abbandonare la paletta, quando essa sarà su questa circonferenza alla distanza di un passo TK dalla linea di centro AB; epperò l'angolo TBL descritto dalla ruota condotta, sarà allora precisamente la metà dell'angolo T*b*K che avrebbe descritto una lanterna di raggio *b*T condotta dalla medesima ruota A. Quindi viene a formarsi la tavola seguente, nella quale si vede espresso il numero di palette che occorre alla ruota condotta, perchè questa possa essere sospinta in modo continuo da una ruota conduttrice di qualsivoglia numero di denti.

### Tavola quarta.

*Incastro di due ruote dentate. —*
*Denti delle ruote condotte senza grossezza sensibile.*

| | Minimo numero di | | |
|---|---|---|---|
| | Denti della ruota conduttrice. | Palette della ruota condotta. | |
| | 3 | una infinità (dentiera) | |
| Rocchetto | 4 | 24 | Ruota |
| Rocchetto | 5 | 16 | Ruota |
| Rocchetto | 6 | 12 | Ruota |
| Rocchetto | 7 | 12 | Ruota |
| Rocchetto | 8 | 11 | Ruota |
| Rocchetto | 9 | 10 | Ruota |
| Rocchetto | 10 | 10 | Ruota |
| Ruota | 12 | 9 | Rocch.° |
| Ruota | 16 | 8 | Rocch.° |
| Ruota | 56 | 7 | Rocch.° |

155. Il punto di contatto tra il dente e la paletta cambia continuamente luogo sull'uno e sull'altra mentre questi si allontanano dalla linea dei centri AB (*fig.* 6); e non è difficile dalle cose dette di raccogliere, che supponendo il dente mozzato in guisa che l'arco di recesso sia eguale ad un passo, il contatto si trasporta successivamente da D fino in $m$ sulla curva del dente, e da L fino in $m$ sulla faccia della paletta; questi due spazi sono disuguali, epperò l'attrito del dente sulla paletta non è semplice attrito di sviluppo, ma bensì della natura di quelli che nel capitolo nono abbiamo chiamati attriti di *scorrimento.*

Risulta ancora dalla stessa osservazione, che la sola parte della paletta che serva alla trasmissione del moto è quella, che sporge al di fuori della circonferenza descritta dal centro B con raggio B$m$, poichè la curva del dente mai non tocca la paletta al di là di questo punto $m$; tuttavia perchè la punta del dente possa muoversi liberamente senza inciampare nell'anima solida della ruota condotta, è necessario che il raggio di questa sia minore di B$i$, essendo $i$ il punto dove la circonferenza descritta dalla estremità dei denti incontra la linea dei centri BTA.

156. Riprendiamo ora da capo questa soluzione, correggendo la supposizione primitiva che le palette non abbiano grossezza sensibile; ammettiamo anzi che le due ruote essendo della medesima sostanza, e dovendo essere egualmente robuste, i denti della ruota condotta debbano avere una grossezza eguale a quella de' denti della ruota conduttrice, e per conseguenza eguale alla metà del passo. Avendo dunque segnati sulle circonferenze delle due ruote A, B (*tav.* 16, *fig.* 1) gl'intervalli DT, TD'...., ET, TE'...., eguali al passo, divideremo ciascuno di questi intervalli in due parti eguali ne'punti $d$, $d'$...., $e$, $e'$....; e così sulla circonferenza della ruota conduttrice A saranno D$d$, T$d'$..... le grossezze dei denti, $d$T, $d'$D'..... le larghezze de' vani: e sulla circonferenza

della ruota condotta B le grossezze de' denti saranno $e$T, $e'$E'...., e le larghezze de' vani E$e$, T$e'$.....

Pei punti di divisione E, $e$, T, $e'$, E'..... si conducano tanti raggi BE, B$e$, BT, B$e'$, BE'....., i quali daranno le direzioni de' fianchi de' denti della ruota condotta. Descritto poi il circolo B$yo$T$y'$ di diametro BT eguale al raggio della ruota condotta, si faccia rotare questo circolo sulla circonferenza della ruota conduttrice, in modo ch'esso generi l'arco epicicloidale TQ, e si descriva l'arco eguale ed opposto $d'$Q: sarà $d'$QT il profilo della costa del dente della ruota conduttrice, il quale dovrà poi ripetersi tante volte quanti sono i denti della ruota A.

Per limitare convenientemente la lunghezza dei fianchi della ruota condotta B, osservisi che essendo Q la punta del dente conduttore, se dal centro A, con raggio AQ, descriveremo un arco di circolo Q$t$, il punto $t$ nel quale quest'arco incontrerà la linea dei centri AB c'indicherà la massima profondità che sia necessario di dare ai vani della ruota condotta, perchè la punta Q del dente $d'$QT possa muoversi liberamente in quel vano; onde segue che la lunghezza de'fianchi della ruota condotta non dovrà certamente essere maggiore di T$t$, e potrà limitarsi descrivendo dal centro B una circonferenza di circolo col raggio B$i$.

Ma rigorosamente parlando non è neppur necessario, che i fianchi abbiano tutta questa lunghezza T$t$. Infatti il punto di contatto tra la costa del dente conduttore ed il fianco del dente condotto essendo sempre in qualche luogo della circonferenza descritta sul diametro BT, questo punto di contatto all'istante in cui i denti si abbandoneranno, si troverà in $o$, nell'intersezione della circonferenza di diametro BT, e della circonferenza Q$t$Q' descritta dal centro A con raggio AQ; il punto di contatto dei due denti non potrà dunque mai avvicinarsi al centro B più che alla distanza B$o$, e quindi dal centro B con raggio B$o$ descrivendo una circonferenza di circolo, questa limiterà la lunghezza del fianco della ruota condotta, ed il vano, all'interno di questa circonferenza, si potrà terminare con un contorno curvo che potrà essere qualunque, purchè lasci una sufficiente libertà al movimento della punta del dente della ruota conduttrice, e non indebolisca troppo la radice del dente condotto.

Si può osservare intanto che per ingrossare i denti della ruota condotta, si sono dovuti assottigliare d'altrettanto quelli della ruota conduttrice, i quali riuscendo perciò anche men lunghi, diventano incapaci di condurre i denti della prima ruota alla medesima distanza, cui li conducevano quando questi non avevano grossezza sensibile; così l'arco di recesso TO che nella *fig.* 6, *tav.* 15 era un po' maggiore del passo TL, nella *fig.* 1, *tav.* 16 è invece un po' minore del passo. Dal che risulta che con la disposizione di quest'ultima figura la ruota A non potrebbe condurre la B in modo continuo e regolare. Ricercando qui nuovamente i minimi numeri di denti, che si possano dare alle due ruote, perchè esse si conducano alla distanza di un passo dopo la linea dei centri, si formerà la tavola seguente, che dovrà sostituirsi a quella della pagina 280 (1).

(1) Siano (*fig.* 8, *tav.* 15) AT $= a$ il raggio della ruota conduttrice, BT $= b$ quello della ruota condotta, il qual raggio è eguale al diametro dell'epiciclo BKT. Sia ancora KBT $= \varphi$ l'angolo di recesso considerato nella ruota condotta, il qual angolo nella figura si è preso eguale all'angolo del passo, ma che potrà pure assumersi maggiore o minore; e sia KAT $= \theta$ la distanza angolare dalla linea dei centri della punta K del dente conduttore, nell'istante in cui esso sta per abbandonare il fianco BK del dente condotto; dicasi finalmente $\psi$ l'angolo descritto dalla ruota conduttrice mentre la ruota condotta descrive l'angolo $\varphi$; e $\zeta$ l'angolo del passo della medesima ruota. Tirisi ora la retta KT, e prolungandola indefinitamente s'abbassi sovra di essa dal centro A la perpendicolare AG, la quale sarà parallela a BK. Ciò posto si avrà

$$\psi = \frac{b\varphi}{a} \;;$$

TAVOLA QUINTA.

*Incastro di due ruote dentate. — Denti eguali ai vani. — Arco di recesso eguale al passo.*

| Ruota conduttrice. | Ruota condotta. |
|---|---|
| 5 | impossibile |
| 6 | 176 |
| 7 | 52 |
| 8 | 35 |
| 9 | 27 |
| 10 | 23 |
| 11 | 21 |
| 12 | 19 |
| 13 | 18 |
| 14 | 17 |
| 15 | 16 |
| 17 | 15 |
| 20 | 14 |
| 24 | 13 |
| 30 | 12 |
| 54 | 11 |
| dentiera | 10 |

poi $\frac{\text{tang GAT}}{\text{tang GAK}} = \frac{\text{GT}}{\text{GK}}$ ossia $\frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,(\varphi + \theta)} = \frac{a}{a+b}$ ;

e ancora $\theta = \psi - \frac{1}{4}\zeta = \frac{b\varphi}{a} - \frac{1}{4}\zeta$ ;

onde finalmente la cercata condizione, acciò la ruota A possa condurre la B alla distanza $\varphi$ dalla linea de' centri, sarà

$$(a+b)\,\text{tang}\,\varphi = a\,\text{tang}\left(\varphi + \frac{b\varphi}{a} - \frac{1}{4}\zeta\right).$$

Se dunque dicansi al solito $n$, $n'$ i numeri dei denti delle rispettive

157. Dalla tavola che precede risulta, che con denti così conformati non si potrà mai aver moto continuo e regolare, se la ruota conduttrice avrà meno di sei denti, oppure se la ruota condotta ne avrà meno di dieci; che una ruota di sei denti non ne potrà condurre una che ne abbia meno di 176; e che una ruota di dieci denti non potrà essere condotta regolarmente che da una ruota di un numero infinito di denti, cioè da una dentiera rettilinea.

Le ruote conformate al modo rappresentato nella *fig.* 1, *tav.* 16 avrebber dunque l'inconveniente di necessitare un numero grande di denti: ma esse ne avrebbero ancora un altro peggiore, cioè, che la ruota condotta non potrebbe cambiarsi in conduttrice e viceversa, senza che ne nascesse un attrito molto notabile, e del medesimo genere di quello che si manifesta, quando si vuole impiegare una lanterna come ruota conduttrice (V. § 152). Allora infatti il contatto dei due denti invece di cominciar solamente nella linea dei centri, comincierebbe prima ch'essi giungessero su questa linea, e cesserebbe all'istante in cui vi fossero giunti, epperò l'arco d'azione della ruota sarebbe *arco di accesso* invece di essere *arco di recesso*.

Per costruire due ruote che possano a vicenda ricevere il movimento e comunicarlo con eguale regolarità e dolcezza,

ruote A, B, e dicasi ancora $p$ la ragione tra l'angolo di recesso $\varphi$ e due angoli retti, avrassi fra i tre numeri $n$, $n'$ e $p$ la relazione

$$\frac{n+n'}{n}\tan g\frac{\pi}{p}=\tan g\left(\frac{n+n'}{n}\cdot\frac{\pi}{p}-\frac{\pi}{4n}\right);$$

dalla quale, dati due di questi numeri, si trarrà il terzo con metodo analogo a quello che abbiamo indicato nella nota al § 150. Così col fare $p=n'$, e col porre successivamente $n=5, 6, 7 \ldots\ldots$, si potranno ottenere i corrispondenti valori di $n'$ consegnati nella tavola quinta del testo.

conviene che i denti di entrambe abbiano un fianco rettilineo ed una costa curvilinea; tali sono quelle che veggonsi disegnate nella *fig.* 2, *tav.* 16, nè ci sarà difficile, dopo tutto ciò che precede, di descrivere la costruzione di queste ruote.

I centri delle due ruote sono in A, B: le loro circonferenze primitive sono DTD′, ETE′...., e si toccano in T. Gl'intervalli DT, TD′....., ET, TE′...... sono eguali al *passo*, e sono divisi in due parti eguali nei punti *d*, *d′*...., *e*, *e′*....

Sul raggio TB della ruota condotta preso per diametro si descriva la circonferenza T*y*B*y′*, e facendo rotare questa circonferenza sul circolo primitivo DTD′ della ruota conduttrice siano generati gli archi epicicloidali eguali ed opposti TQ, *d′*Q, che formeranno il profilo della costa del dente conduttore; dai punti *d′*, T si tirino i raggi *d′*A, TA che daranno le direzioni dei fianchi del dente medesimo, dei quali fra poco limiteremo la lunghezza. Le stesse costruzioni si ripetano tante volte, quanti sono i denti della ruota conduttrice.

Similmente sul raggio TA della ruota conduttrice preso per diametro si descriva il circolo T*x*A*x′*, e facendolo rotare sul circolo primitivo ETE′ della ruota condotta sieno generati gli archi epicicloidali eguali ed opposti TR, *e*R che formeranno le coste del dente condotto, e si tirino i raggi BT, B*e* che ne formeranno i fianchi; le medesime costruzioni si ripetano successivamente tante volte quanti sono i denti della ruota condotta.

Se si conservasse ai denti tutta la lunghezza risultante dalle costruzioni precedenti, cioè se si terminassero in punta aguzza ne'punti Q, R, la profondità dei vani capaci di riceverli, e di lasciar libero gioco al loro movimento, si determinerebbe facilmente segnando i punti *t*, *t′*, dove la linea dei centri è incontrata dalle circonferenze che passano per la punta dei denti della ruota conduttrice e della ruota condotta, e descrivendo poi dai centri A, B due circoli co' raggi A*t*, B*t*. Nè più difficile sarebbe il determinare l'ampiezza dell'arco di azione; infatti, poichè il punto di contatto tra la costa del dente conduttore ed il fianco del dente condotto si trova sempre in qualche luogo della circonferenza $ByTy'$, così all'istante in cui la punta K del primo dente è sul punto di abbandonare il fianco del dente opposto, essa dee trovarsi in $o$, e la ruota condotta ha descritto così l'arco TO dopo la linea dei centri, cioè TO è l'arco *di recesso.* Ma prima di arrivare alla linea dei centri, il fianco del dente conduttore comincia a spingere la costa del dente condotto, e il loro contatto dovendo trovarsi sempre in qualche luogo della circonferenza $TxAx'$, questo contatto comincia tostochè la punta R del dente condotto giunge in $o'$ sopra questa circonferenza, epperò O'T è *l'arco di accesso.* L'arco di azione è eguale alla somma dell'arco di accesso O'T e dell'arco di recesso TO, ed ogni volta che questa somma riescirà notabilmente maggiore di un passo, non solamente si potrà, ma sarà pure opportuno troncare alquanto la punta de' denti, che così lunghi e aguzzi riescirebbono soverchiamente deboli, facilmente si romperebbono e in breve si consumerebbono. Se si voglia, per esempio, che l'arco di recesso sia eguale a' due terzi o ai tre quarti di un passo, si porterà sulla circonferenza primitiva della ruota condotta e dopo la linea dei centri un arco TS di questa lunghezza, e condotto il raggio BS, si noterà il punto $s$ dov'esso incontrerà la circonferenza $BxTx'$ di diametro BT, e fatto centro in A col raggio $As$ si descriverà una circonferenza $ZsZ'$, la quale segherà tutti i denti della ruota conduttrice alla voluta lunghezza. E similmente, sulla circonferenza della ruota conduttrice, innanzi alla linea dei centri, si porterà un arco TS' eguale all'arco di accesso che si vuol dare alle ruote, si noterà il punto $s'$, dove il raggio AS' incontrerà la circonferenza $TyAy'$, e la circonferenza $Vs'V'$ descritta dal centro B con raggio $Bs'$ limiterà convenientemente la lunghezza dei denti della ruota condotta.

È manifesto che se la ruota B, che si è finquì considerata come ruota condotta, diventasse invece ruota conduttrice, e la A fosse così là ruota condotta, l'arco di accesso si muterebbe in arco di recesso, e viceversa l'arco di recesso si muterebbe in arco di accesso, e l'arco totale di azione, eguale alla somma di que' due archi, non sarebbe nè accresciuto, nè diminuito.

È manifesto egualmente, che co' denti mozzati come abbiamo detto non è più necessario di dare ai vani della ruota condotta tutta la profondità T$t$, nè a quelli della ruota conduttrice tutta la profondità T$t'$; ma che a questi vani basteranno le profondità T$i$, T$i'$, ond'essi potranno limitarsi mercè due circonferenze descritte dai centri B, A co' raggi B$i'$, A$i$, come effettivamente si veggono segnati nella figura.

158. Ecco ora due tavole estratte dall'opera più volte citata del sig. Willis, e che fanno conoscere i minimi numeri di denti che si possono impiegare, quando l'arco di recesso è eguale ai tre quarti del passo, od ai due terzi di esso solamente.

## Tavola sesta (1).

*Denti eguali ai vani. —*
*Arco di recesso eguale ai tre quarti del passo.*

| Minimo numero dei denti delle ruote | |
|---|---|
| Conduttrice. | Condotta. |
| 3 | impossibile |
| 4 | 35 |
| 5 | 19 |
| 6 | 14 |
| 7 | 12 |
| 8 | 10 |
| 10 | 10 |
| 12 | 9 |
| 16 | 8 |
| 31 | 7 |
| impossibile | 6 |

(1) I numeri consegnati nell'ultima colonna di questa tavola sesta e della settima si troveranno determinando per mezzo della equazione della nota al § 156, i valori di $n'$ corrispondenti alla supposizione di $p=\frac{4}{3}n'$, oppure di $p=\frac{3}{2}n'$, ed assumendo successivamente per $n$ i numeri inscritti nella colonna prima della medesima tavola.

### Tavola settima.

*Denti eguali ai vani. —*
*Arco di recesso eguale ai due terzi del passo.*

Minimo numero dei denti delle ruote

| Conduttrice. | Condotta. |
|---|---|
| 2 | impossibile |
| 3 | 36 |
| 4 | 15 |
| 5 | 13 |
| 6 | 10 |
| 7 | 9 |
| 8 | 8 |
| 11 | 7 |
| 20 | 6 |
| impossibile | 5 |

Egli è quasi soverchio di aggiungere, che le tre tavole seconda, terza e quarta suppongono che i denti terminino in punta, cioè abbiano tutta la lunghezza data dall'incontro dei due archi epicicloidali che ne formano le coste. Se si vorrà che i denti sieno meno fragili, converrà poterne mozzare la punta nel modo che abbiamo insegnato, e allora i numeri di denti segnati nelle tavole non saranno più bastanti, e andranno per conseguenza accresciuti.

159. Nella costruzione de' grossi meccanismi ne'quali una somma accuratezza non è necessaria, si sogliono dare ai denti le dimensioni seguenti:

| | | |
|---|---|---|
| Grossezza del dente ................ | $\frac{5}{11}$ | del passo |
| Vano tra dente e dente ............... | $\frac{6}{11}$ | » |
| Sporto del dente oltre alla circonferenza primitiva .................. | $\frac{3}{10}$ | » |
| Profondità del vano entro alla circonferenza primitiva .................. | $\frac{4}{10}$ | » |

La *fig.* 3, *tav.* 16 rappresenta l'incastro di un rocchetto AT e di una dentiera BB′ capaci di menarsi a vicenda; la costruzione è la medesima che abbiamo insegnata finquì; ma una delle due circonferenze primitive, cioè quella della dentiera, essendo di raggio infinito, cioè essendo una retta EE′, ne segue che la costa TQ dei denti del rocchetto ha per profilo la evolvente del circolo primitivo DTD′ del rocchetto medesimo; e quindi, conforme abbiamo veduto trattando dei bocciuoli nel capitolo dodicesimo, il punto di contatto di questa costa col dente della dentiera si trova sempre sulla linea primitiva EE′ di questa, cioè il dente della dentiera è sempre toccato nello stesso punto da quello del rocchetto. La costa TR del dente della dentiera è tagliata secondo la cicloide generata dal circolo Ao′T di diametro eguale al raggio primitivo AT del rocchetto, girando sulla linea primitiva EE′ della dentiera.

La *fig.* 4 rappresenta l'incastro di un rocchetto interno DTD′ con una ruota annulare B′B″; i denti della ruota si costruiscono ancora secondo la regola insegnata per le ruote a sprone, cioè la loro costa è formata da un arco d'ipocicloide descritta facendo rotare nella concavità della circonferenza primitiva ETE′ della ruota, un circolo AoT di diametro eguale al raggio primitivo AT del rocchetto.

La lunghezza del fianco e la profondità del vano del rocchetto si determinano secondo le regole date per le ruote a sprone; ma la costa $Tr$ de' suoi denti si descrive facendo rotare la circonferenza primitiva $EE'$ della ruota sulla circonferenza primitiva $DD'$ del rocchetto, precisamente come se la ruota annulare fosse una ruota a caviglie (V capitolo ventesimo). Segue da questa costruzione, che il punto di contatto tra la costa del dente del rocchetto e il dente della ruota si trova sempre sulla circonferenza primitiva della ruota, e che i denti di questa non hanno fianco, propriamente parlando, ed in pratica possono avere un fianco di pochissima lunghezza. La profondità del vano si determinerà con la solita regola.

Quí pure come per le ruote annulari a caviglie l'arco di recesso è tanto più grande, quanto è maggiore il raggio del rocchetto, e quanto è minore il raggio della ruota. Quindi, se si vuole che l'arco di recesso abbia una certa ampiezza, non si può dare al rocchetto meno che un certo numero di denti, nè alla ruota più che un certo altro numero, come si vede nelle tavole seguenti, nelle quali l'arco di recesso si suppone eguale al passo.

### Tavola ottava.

*Rocchetto interno mena una ruota annulare. — Grossezza del dente eguale al vano.— Arco di recesso eguale al passo.*

| Numero delle ali del rocchetto. | Massimo numero dei denti della ruota. |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 3 | 50 |
| 4 | qualunque numero |

## Tavola nona.

*Ruota annulare mena un rocchetto interno. — Grossezza del dente eguale al vano.— Arco di recesso eguale al passo.*

| Numero delle ali del rocchetto. | Massimo numero dei denti della ruota. |
|---|---|
| 6 | impossibile |
| 7 | 14 |
| 8 | 25 |
| 9 | 60 |
| 10 | qualunque numero |

# CAPITOLO VENTESIMOQUARTO.

## COSTRUZIONE DELLE RUOTE DENTATE. – SOLUZIONI TERZA E QUARTA. – RUOTE DI HOOKE E DI WHITE.

160. L'uso delle ruote a denti epicicloidali, di cui abbiamo minutamente insegnata la costruzione, va soggetto, come abbiamo altra volta osservato, ad alcune eccezioni, le quali costringono talora il macchinista a ricorrere a dentature diversamente conformate. È chiaro infatti che secondo i metodi svolti negli ultimi capitoli, la figura del contorno del dente di una ruota dipende non solamente dal raggio della ruota medesima, ma eziandio da quello della ruota con cui essa dee fare incastro. Da ciò segue, che una ruota intagliata come si conviene per accompagnarsi con un rocchetto di 10 denti, per esempio, non potrà mai fare giusto incastro con una ruota che abbiane 40 o 50; e viceversa, che una ruota che si affarebbe a quest'ultima, malamente si compagnerebbe con quel rocchetto. Ora egli occorre sovente in pratica, che una medesima ruota, vuoi successivamente, o vuoi anche nel medesimo tempo, debba comunicare il movimento a parecchie altre ruote notabilmente diseguali tra loro. Così nella *fig.* 13, *tav.* 11 la ruota B mena nello stesso tempo le due ruote diseguali A e C, e se noi supponiamo che queste sieno due lanterne, i denti della ruota motrice dovrebbero avere nello stesso tempo la figura delle due epicicloidi generate dalla rotazione dei due circoli A, C sulla circonferenza di B, la qual cosa è impossibile.

A questa difficoltà provveggono le tre ultime soluzioni indicate nel capitolo undecimo, e particolarmente la terza, nella quale i denti di due ruote che fanno incastro sono conformati secondo le evolventi di due circoli detti *di base*, i quali hanno i loro raggi proporzionali a quelli delle circonferenze primitive delle due ruote. Poichè è chiaro potersi convenientemente maritare due ruote così costrutte, quali che sieno i loro raggi, tanto solo che il passo sia lo stesso in entrambe, e la stessa sia pure la ragione dei raggi primitivi ai raggi di base corrispondenti.

Ecco ora brevemente il modo da tenersi nella costruzione di queste ruote.

Sieno A, B (*tav.* 16, *fig.* 5) i due centri, DTD′, ETE′ le circonferenze primitive, che si toccano in T. Di qua e di là di questo punto, sulle due circonferenze si portino le distanze D*d*, *d*T, T*d*′, *d*′D′...., E*e*, *e*T, T*e*′, *e*′E′...... tutte eguali tra loro ed alla metà del passo. Sulla circonferenza primitiva della ruota condotta BEE′, si porti ancora l'arco TO eguale all'arco di recesso, il quale nella nostra figura si è supposto un po'minore del passo TE, ed al punto O si tiri il raggio BO; si tiri pure nella ruota conduttrice il raggio AO′ parallelo a BO, e pel punto T si faccia passare la *a*T*b* perpendicolare ai due raggi AO′, BO. Le due circonferenze R″R*a*R′, S″S*b*S′ descritte dai due centri A, B, coi raggi A*a*, B*b*, saranno quelle che nel capitolo ventesimoprimo abbiam chiamate le *basi* delle due ruote; l'arco O′T sarà l'arco di accesso, e così l'arco di azione sarà eguale alla somma dei due archi OT, O′T.

Sia R*i* un arco di evolvente della circonferenza R*ar*R′, ed *ri* un arco eguale ed opposto descritto alla distanza T*d*′ eguale alla metà del passo. Questi due archi che si tagliano in *i* daranno la cercata figura del dente della ruota conduttrice; le porzioni TR, *d*′*r* dei due archi che cadono nell'interno del circolo primitivo formano i fianchi del dente; le porzioni T$i$, $d'i$ che sporgono fuori del circolo primitivo ne formano le coste; e per limitarne la lunghezza in modo che l'arco di recesso sia veramente TO come si è supposto, basterà recidere la punta del dente, descrivendo dal centro A e con raggio A$b$ la circonferenza Z$v$Z'.

Similmente se pel punto T si segnerà l'arco STK della evolvente del circolo S'SS'' e pel punto $e$, l'arco eguale ed opposto $se$K, troncando questi due archi, mercè la circonferenza V$az$V' descritta dal centro B col raggio B$a$, si avrà il profilo del dente della ruota condotta. Qui pure le parti del contorno contenute entro il circolo primitivo formano i fianchi del dente, e le parti che sporgono fuori di questo circolo, ne formano le coste.

Finalmente per dare ai vani delle due ruote la profondità necessaria, acciò i denti opposti possano muoversi in essi liberamente, dai centri A, B, e coi raggi A$z$, B$v$ si descrivano le circonferenze $z'zz''$, $v'vv''$, e la costruzione si compirà col prolungare i fianchi sino all'incontro di queste circonferenze; i quali prolungamenti potranno farsi retti o curvi, purchè lascino libero gioco ai denti, coi quali non debbono mai venire a contatto.

Se le due ruote avessero un piccol numero di denti, o se l'arco di recesso si fosse assunto troppo grande rispetto al passo, potrebbe avvenire che la circonferenza Z$v$Z' non incontrasse le curve R$ir$ del dente, ma passasse al di là del punto $i$. In tal caso il dente conduttore abbandonerebbe il dente condotto prima di averlo sospinto fino in O, cioè l'arco di recesso risulterebbe in fatti minore di quello che si era assunto, e vi si rimedierebbe ricominciando da capo la costruzione, e scemando l'arco di recesso, oppure accrescendo convenientemente il numero dei denti delle due ruote.

Non ridiremo qui ciò, che abbiam detto altre volte sulla proprietà che spetta alle dentature ad evolventi di cerchio, di potersi condurre equabilmente e con la medesima ragione di velocità angolari, quando si fa variare la distanza dei centri delle ruote, la quale proprietà può riuscire in pratica sommamente vantaggiosa. Nè ci sembra necessario di ripetere, che quando una stessa ruota dee condurne parecchie di raggio diverso, l'arco di accesso dee farsi eguale in tutti questi incastri, cioè tutti i circoli di base debbono aver raggi proporzionali a quelli dei circoli primitivi delle ruote cui appartengono (V. capitolo ventesimoprimo).

161. Proponiamoci ora di disegnare una ruota con denti a evolvente, capace di condurre una dentiera rettilinea, o di essere da essa condotta. Sia B (*tav.* 17, *fig.* 1) il centro della ruota, BT il suo raggio primitivo, ATA′ la linea primitiva della dentiera.

Supponendo che la dentiera conduca la ruota, sia TO l'arco di recesso voluto; si tiri il raggio BO, dal punto T si cali sopra di esso la perpendicolare $a$T$b$, si descriva il circolo R$b$R′ che sarà la *base* della ruota, e pel punto T si segni l'arco di evolvente $u$TK che formerà una delle faccie del dente della ruota, cioè un fianco $u$T ed una costa TK; l'altra faccia $u'$K si segnerà descrivendo alla distanza di un mezzo passo TG un arco $u'$GK eguale e posto a rovescio.

Quanto al dente SIS′ della dentiera, esso avrà la sua faccia SI rettilinea e perpendicolare alla linea $b$T$a$; infatti la circonferenza della ruota conduttrice essendo qui una retta, la base di questa ruota sarà essa pure una retta parallela ad AA′ e condotta a distanza infinita, e l'evolvente di questa base, nelle vicinanze del suo punto di contatto con la curva $u$K, dovendo avere per raggio di curvatura la retta T$a$ infinitamente prolungata, si confonderà con la retta SI.

Per limitare la lunghezza dei denti della dentiera in modo che l'arco di recesso sia effettivamente eguale all'arco dato TO, basterà condurre pel punto $b$ la retta X$b$X′ parallela alla linea primitiva AA′; poichè il punto di contatto dei due denti trovandosi sempre sulla retta $ab$, esso cadrà nel punto *b* all'istante in cui l'estremità del dente SIS' starà per abbandonare quello della ruota. Notando poi il punto V, dove la retta XX' taglia la linea BT dei centri, e descrivendo dal centro B con raggio BV una circonferenza di circolo, essa limiterà la profondità dei vani della ruota.

Non sarà difficile di riconoscere, che se per la punta K del dente della ruota si condurrà la retta K*m* tangente al circolo di *base*, e pel punto *m* di tangenza si farà passare il raggio BM del circolo primitivo, OM sarà eguale all'arco di accesso, cosicchè l'arco totale di azione risulterà eguale a TO più OM, cioè a TM. E qualora quest'arco sia più grande del bisogno, sarà facile limitare la lunghezza del dente della ruota, in modo da ridurre l'arco di azione a quella ampiezza che si giudicherà conveniente.

Finalmente, pel punto *v* dove la circonferenza descritta dalla punta del dente incontra il raggio BT prolungato, conducendo una parallela SS' alla linea primitiva AA', essa limiterà la profondità dei vani della dentiera.

162. L'attrito, che fanno tra loro i denti delle ruote, potendo cagionare una sensibile resistenza, si è tentato sovente di costrurre ruote esenti in tutto od in gran parte da attrito; il primo che paia aver ottenuto l'intento è il celebre matematico e fisico Hooke (1). Egli osservò, che l'attrito nelle ruote dentate è tanto maggiore quanto maggiore è l'arco di azione, cioè quanto più grande è la distanza alla quale le due ruote si conducono, prima e dopo della linea dei centri. Scemando adunque questa distanza si scemerà l'attrito, e se fosse possibile di fare, che le due ruote si conducessero per un arco di azione di lunghezza insensibile soltanto,

(1) Roberto Hooke nato nel 1635 nell'isola di Wight, morto nel 1703. Gli si attribuisce l'invenzione della molla spirale, che regola il movimento degli orologi da tasca; a lui pure è dovuto un ingegnoso meccanismo che avremo opportunità di descrivere in un prossimo capitolo sotto il nome di *giunto universale*.

l'attrito sarebbe anche affatto insensibile. Ora ciò con la solita costruzione dei denti non altrimenti si potrebbe ottenere, salvo facendoli infinitamente piccoli od almeno piccolissimi, e perciò numerosissimi; il merito della invenzione di Hooke consiste nell'aver lui insegnato a produrre il medesimo effetto con un numero limitato di denti.

Concepiamo che si abbiano, per esempio, una ruota di otto denti, ed un rocchetto di quattro ali; supponiamo che queste due ruote abbiano una notabile ed eguale grossezza secondo i loro assi, cosicchè sia facile di rifenderle sulla spessezza, facendone quattro, sei, otto o più fogli, onde vengano ad ottenersi, verbi grazia, quattro ruote sottili di otto denti ciascuna, e quattro rocchetti egualmente sottili di quattro ali. Supponiamo ancora che le quattro ruote così ottenute tornino ad unirsi insieme per formarne di nuovo una ruota unica, ma non più in modo che tutti i denti delle quattro foglie sovrapposte si ricoprano perfettamente l'un l'altro come facevano prima che la ruota si rifendesse, ma bensì in tal guisa, che i denti di ciascuna foglia sporgano di un quarto di passo su quelli della foglia precedente; in somma, si dispongano queste foglie l'una sull'altra in modo che i loro trentadue denti formino otto gradinate a chiocciola ciascuna di quattro scalini curvi ed eguali. Lo stesso si faccia con le quattro foglie in cui è stato rifesso il rocchetto, ma però in modo che le scalinate de' suoi denti, o le eliche formate dalle loro punte salgano da sinistra a destra, se quelle della ruota salgono da destra a sinistra, e viceversa. Si avranno così le due ruote composte rappresentate nella *fig.* 2, *tav.* 17, ed esse equivarranno evidentemente ad una ruota di 32 denti e ad un rocchetto di 16 ali, poichè appena cesseranno di condursi i due denti della prima foglia, cominceranno a premersi quelli della seconda, che li seguitano alla distanza di un quarto di passo; a questi succederanno quelli della terza foglia, poi quelli della quarta; e cessando questi la loro azione, sottentreranno due nuovi denti della prima foglia, e così senza fine. Ne segue che, ancorchè ciascuna foglia non possa condurre la sua compagna che per un quarto di passo solamente, tuttavia le due ruote composte saranno in grado di condursi in modo continuo, precisamente come se il passo non fosse che la quarta parte di quello delle ruote primitive. Ma il contatto tra i due denti, che sono a ciascun momento in azione, si estenderà soltanto secondo una retta o generatrice eguale in lunghezza alla grossezza di uno de' fogli, in cui sì la ruota che il rocchetto sono stati rifessi. E nel girare delle ruote, questa linea di contatto passando successivamente da un foglio all'altro, tanto meno si tratterrà sopra ciascuno, quanto maggiore sarà il numero di essi, e tanto men grande sarà il suo cangiamento di luogo lunghesso il contorno di ciascun dente.

Ora nulla non limita il numero delle foglie, di cui ciascuna ruota può essere composta; e supponendo che si uniscano cento, dugento, mille, centomila fogli sottilissimi di metallo, diverranno insensibili alla fine gli scalini, i denti offriranno l'aspetto di superficie continue fatte a chiocciola, e le due ruote si condurranno in modo continuo toccandosi in un punto solo, il quale non si allontanerà mai sensibilmente dalla linea dei centri, o per dir meglio dal piano condotto per gli assi delle due ruote; che è appunto ciò che si voleva ottenere. Ben inteso però che la lunghezza e la forma dei denti di ciascuna foglia debbono essere tali che il contatto tra' due denti opposti non duri che un istante; la qual cosa è sempre facile a farsi.

Queste ruote a denti elicoidali, riinventate a nostri tempi da Sheldrake e da White, del quale ultimo hanno preso il nome, sono state argomento di studio pel sig. Teod. Olivier, che ha pur dimostrato come possa in modo analogo levarsi di mezzo l'attrito nelle ruote dentate atte a trasmettere il moto rotatorio equabile tra assi convergenti, o collocati in piani diversi. Esse non sono però impiegate in pratica, sia a motivo della difficile loro costruzione, sia perchè vanno soggette ad alcuni gravi inconvenienti, di cui non ci sarebbe possibile render ragione, senza entrare in considerazioni meccaniche estranee al presente nostro studio.

163. La costruzione proposta da White può ridursi a ciò che segue:

Siano AA′, BB′ (*tav.* 17, *fig.* 4) due assi paralleli tra loro, e QRT, SVT i circoli primitivi di due ruote cilindriche girevoli intorno a questi assi. Su questi circoli si ergano i cilindri QRR′T′T, SVV′T′T di eguale altezza, i quali si tocchino secondo la generatrice TT′. Sia PP′N′N il piano tangente comune ai due cilindri, ed in questo piano sia condotta la retta inclinata PN′, la quale tagli in M la generatrice di contatto TT′.

Ciò posto, s'immagini il piano PP′NN′ avvolto sulla superficie del cilindro QR′, e sia QMR′ l'elica secondo cui si disporrà la retta PN′. S'immagini similmente avvolto il medesimo piano sull'altro cilindro, e sia SMV′ l'elica che segnerà sovra di esso la retta PN′. Queste due eliche avendo la medesima inclinazione, ed un punto comune M, saranno tangenti tra di loro in questo punto, e facendo girare i due cilindri intorno ai rispettivi loro assi, e con velocità angolari reciprocamente proporzionali ai raggi dei cilindri medesimi, le due curve si manterranno sempre tangenti tra di loro, sviluppandosi senza scorrere l'una sull'altra, e rimanendo sempre il loro punto di contatto sulla generatrice TT′ comune ai due cilindri, sulla quale si trasporterà descrivendo uno spazio eguale al passo di una delle eliche, mentre il cilindro su cui questa è segnata farà una intiera rivoluzione.

Siano ora (*tav.* 17, *fig.* 5) AA′T′T, BB′T′T i rettangoli generatori dei due cilindri fin quì considerati. Nel rettangolo AT′ si conduca la retta $aa'$ parallela all'asse AA′, e si segni il triangolo $nmp$ con la base $np$ sulla retta $aa'$, e col vertice $m$ sulla generatrice TT′. Si faccia girare equabilmente il rettangolo $AA'aa'$ intorno all'asse $AA'$, ed intanto si faccia scorrere equabilmente il triangolo $nmp$ lungo la retta $aa'$, in modo che percorra la lunghezza $h$ mentre il rettangolo compie un giro intiero; si genererà così un cilindro di raggio $Aa$, e sovra di esso una spira di vite a pane triangolare di passo $=h$, con lo spigolo elicoidale generato dal punto $m$, sulla superficie cilindrica generata dalla retta $TT'$.

Si conduca similmente nel rettangolo $BB'T'T$ la retta $bb'$ parallela all'asse $BB'$, e si segni il triangolo $qrs$, con la base $qs$ sulla $bb'$, e col lato $rs$ che passi pel punto $m$ e si prolunghi alquanto al di là di questo punto. Facendo girare il rettangolo $Bb'$ intorno all'asse $BB'$, ed intanto facendo scorrere il triangolo $qrs$ lungo la retta $bb'$ in modo che percorra lo spazio $\frac{h.Bb}{Aa}$, mentre il rettangolo compie il suo giro si genererà così un secondo cilindro di raggio $Bb$, e sopravi una spira di vite di pane triangolare, di inclinazione perfettamente eguale a quella della spira elicoidale del primo cilindro. E risulta dalle cose dette, che facendo rotare il cilindro $AT'$ intorno all'asse $AA'$, il suo movimento si trasmetterà all'altro cilindro $BT'$, precisamente come se essi si conducessero pel semplice contatto di sviluppo delle superficie primitive generate dalla retta $TT'$ intorno ai due assi; e che in questo movimento lo spigolo del pane del primo cilindro, si manterrà sempre in contatto con la superficie elicoidale del pane del secondo cilindro, toccandolo sempre in un punto solo della retta $TT'$, lungo la quale il contatto si verrà trasportando.

164. La trasmissione del movimento tra le due ruote cilindriche così costrutte non potrà però durare oltre al tempo, che il cilindro maggiore impiega a compiere una intiera rotazione, se l'altezza di esso si suppone eguale al passo dell'elica sovr'esso descritta; poichè in questo tempo il punto di contatto avrà percorso tutta la lunghezza della retta $TT'$ passando dalla base inferiore alla base superiore del cilindro;

nè potrà ricominciare sulla prima base un nuovo contatto delle due eliche, salvochè, essendo il diametro del cilindro maggiore multiplo esatto di quello dell'altro cilindro, i punti medesimi ne' quali era cominciato il contatto la prima volta, non fossero tornati ad incontrarsi.

Generalmente, se i diametri dei due cilindri staranno tra di loro nella ragione dei due numeri intieri $m$ ed $n$, le origini delle due eliche non possono tornare ad imboccarsi salvo dopo $n$ giri del primo cilindro, e di $m$ giri del secondo; ed un solo pane elicoidale per ciascun cilindro non potrebbe bastare alla indefinita trasmissione del movimento, la quale si otterrà moltiplicando il numero dei pani delle due viti.

Dividansi le circonferenze primitive delle due ruote in parti eguali, i cui numeri stieno tra di loro $::m:n$. Si segnino quindi per tutti i punti di divisione tante eliche, tutte egualmente inclinate, e tali che l'estremità superiore di ognuna di esse cada un po' al di là della generatrice condotta per l'estremità inferiore dell'elica consecutiva, acciò all'istante in cui il contatto di due eliche avrà percorso tutta la lunghezza dei due cilindri, passando dalle basi inferiori alle basi superiori di essi, già la coppia seguente di eliche sia entrata in azione, cominciando a toccarsi ne' punti ove le due curve si spiccano dalla base inferiore. - Questa costruzione si vede espressa nella *fig.* 6 della *tav.* 17. - Con metodo analogo potrà il movimento comunicarsi tra due tronchi di cono, che abbiano comune il vertice, sostituendo alle eliche cilindriche due eliche coniche, generate inviluppando successivamente sulla superficie dei due coni il loro comune piano tangente, sul quale in luogo di una linea retta siasi segnata una spirale d'Archimede.

165. Dell'artifizio immaginato da Hooke si può fare una applicazione che riesce utile quando con un rocchetto di sole due ali vuolsi trasmettere il movimento ad una ruota intorno

ad un asse parallelo a quello del rocchetto (1); sul perimetro di un disco circolare BCDE (*tav.* 17, *fig.* 3), si distribuisce ad eguali intervalli un numero pari di denti, co' loro fianchi rettilinei e diretti secondo i raggi. Questi denti, i quali non hanno *costa*, ma sono terminati esteriormente dalla circonferenza *cde* del circolo primitivo della ruota, concentrica a quella del disco CDE, non sono collocati nel piano medesimo del disco, ma alternativamente in due piani differenti; cioè la metà di essi *aaa*..... son fermati sopra una delle facce del disco, e l'altra metà *bbb*...... sulla faccia opposta. Il rocchetto A poi è formato di due piastre *h*, *h'*, ciascuna delle quali forma un dente terminato da due coste curvilinee tagliate secondo la epicicloide generata dalla rotazione del circolo TIBL di diametro eguale al raggio primitivo BT della ruota condotta, sul circolo primitivo AT del rocchetto. Queste due piastre sono fermate l'una sull'altra così ch'esse pure si trovino in piani differenti, e che condotti a contatto i due circoli primitivi, una delle piastre cada nel piano de' denti *aaa*, l'altra in quello de' denti *bbb*.

(1) Se i due assi fossero tra loro perpendicolari si potrebbe impiegare una vite-perpetua a due pani (V. capitolo decimoterzo, pag. 143 e 144).

## CAPITOLO VENTESIMOQUINTO

### DELLE PALMOLE.

166. Gli stessi principii, che abbiamo esposti nel capitolo ventesimoprimo per applicarli poi alla costruzione delle ruote dentate, valgono pure per quella dei *bocciuoli* che servono a trasformare il moto circolare continuo in moto rettilineo alternativo, e delle *palmole* (cui anche si dà il nome di *levatoi*) mercè delle quali il moto circolare continuo si trasmuta in circolare alternativo.

Al primo genere appartengono que' meccanismi, per cui si sollevano i pestelli de' molini da polvere, e de' brillatoi da riso, dei quali abbiamo trattato con sufficiente ampiezza nel capitolo dodicesimo. Si riferiscono pure al genere dei bocciuoli le chiavi ordinarie, le quali girando nella toppa menano innanzi e indietro la stanghetta; ma nella costruzione degli ingegni delle chiavi si ha per oggetto di assicurare non tanto l'equabilità del movimento, quanto la sicurezza della serratura contro all'uso, o piuttosto all'abuso de' grimaldelli.

Quanto alle palmole, per cui il moto circolare continuo si trasforma in circolare alternativo, io non citerò altro esempio che quello dei martelli meccanici o *mazzi* impiegati a pestare i cenci nelle *cartiere*, a sodare i panni nelle *gualchiere*, ed i *magli* delle ferriere, ai quali ultimi più particolarmente si riferisce ciò che sto per dire.

Maglio è un grosso martello ABC (*fig.* 1, 2, 3, 4, *tav.* 18) con testa di ferro, e manico o fusto or di legno, or di ferro, mosso dalla forza dell'acqua o del vapore per via di una ruota a palmole. Il manico del maglio quando è di legno (*fig.* 1 e 4), è fermato con biette nell'occhio di un grosso anello di ferro, detto *boga*, da cui sporgono a destra e a sinistra due perni o *poppe*, intorno ai quali il maglio si muove con moto circolare alternativo. La boga si vede rappresentata di fianco ed in prospetto in iscala maggiore nella *fig.* 6, *tav.* 18. Quando il maglio è di ferro fuso (*fig.* 2 e 3), esso non ha boga, ma si muove sopra due perni collocati alle estremità di un asse D che fa *gruccia* col manico, ed è di un solo gitto con esso. Le palmole disposte intorno alla ruota R, incontrano nel lor giro l'estremità di uno sprone C fermato esso pure sul manico del martello, e premendolo sollevano la testa di questo fino ad una determinata altezza, dalla quale lo lascian poi tutto a un tratto ricadere sul *tasso* I, voglio dire sul ferro che si sta lavorando sul tasso.

La testa del maglio è sempre collocata verso una delle estremità del manico; la boga o più generalmente l'asse di rotazione del maglio ora è verso il mezzo come nella *fig.* 1, ora verso l'estremità opposta alla testa come nelle *fig.* 2, 3 e 4. Nel primo caso (*fig.* 1) le palmole operano premendo d'alto in basso lo *sprone*, o *calciuolo*, o *staffa* C collocata all'estremità della coda BC, cioè di quella parte del manico che sporge dietro alla boga, ed allora il maglio dicesi *ad altaleno*, od *a leva*. Nel secondo caso, cioè quando l'asse di rotazione del martello è all'estremità opposta a quella della testa, le palmole operano di sotto in su, sia che aggrappino un dente che sporge al di là della testa come nei magli detti *frontali* (*fig.* 2), sia che spingano uno sprone posto sul manico tra la testa e la boga, come ne' magli *tedeschi*, detti anche *magli di sollevamento* (*fig.* 3 e 4). Al genere dei magli frontali debbono anche riferirsi i mazzi delle cartiere (*fig.* 7), e quelli delle gualchiere (*fig.* 8).

167. Ne' magli ad altaleno (*fig.* 1), dal centro dei perni della boga descrivendo un circolo DCE con raggio eguale alla lunghezza BC della coda, sarà questo il circolo primitivo

del maglio; ed il circolo FCG descritto dal centro della ruota a palmole R, e tangente al circolo DCE, sarà la circonferenza primitiva della ruota.

Il calciuolo C presenta ordinariamente nella sua parte superiore una faccia o tavola piana, sulla quale viene a premere il filo della palmola, e questa faccia è rigorosamente o prossimamente contenuta nel piano, che passa per l'asse della ruota e per i perni della boga. Allora, se si vuole che il moto equabile della ruota produca un moto equabile nel martello, la curva della palmola debb'essere un arco della epicicloide generata facendo rotare sul circolo primitivo FGC della ruota un circolo CHB, che abbia per diametro il raggio primitivo BC del martello. La lunghezza delle palmole si determina facilmente quando si conosce l'angolo di levata del maglio, cioè l'angolo ch'esso dee descrivere intorno ai suoi perni prima di ricadere sull'incudine.

Se il calciuolo C non si terminasse superiormente in tavola piana, ma a modo di spigolo smussato, cosicchè la palmola lo toccasse sempre a un dipresso nello stesso luogo, l'incastro invece di assomigliársi a quello di una ruota con un rocchetto a fianchi rettilinei, sarebbe in tutto analogo a quello di una ruota con una lanterna, e l'epicicloide della palmola dovrebbe essere generata dalla rotazione del circolo primitivo DCE sul circolo primitivo FGC.

Le medesime regole precisamente si applicano al maglio frontale (*tav.* 18, *fig.* 2) ed ai mazzi delle gualchiere (*fig.* 3) e delle cartiere (*fig.* 4), che tutti hanno disposizioni consimili.

168. I magli di *sollevamento* possono distinguersi ancora in due specie, secondochè l'albero o stile della ruota motrice, il quale porta le palmole, è collocato al dissotto del manico del maglio ed in un piano verticale perpendicolare a quello che passa per l'asse del maglio stesso, oppure di fianco a questo ed in un piano ad esso parallelo; noi chiameremo i primi *magli per dissotto*, i secondi *magli laterali* o di *fianco*.

Ne' magli per dissotto (*tav.* 18, *fig.* 3) i levatoi FGH apparterranno al genere degli eccentrici, oppure a quello delle palmole, secondo che per la figura del contorno dello sprone C ch'essi sospingono all'insù, il punto di contatto tra esso e il levatoio si manterrà nello stesso punto di questo contorno, oppure verrà mutando luogo sovra di esso. Nel primo caso la curva dell'eccentrico si costruirà nel modo insegnato nel § 78 e rappresentato nelle *fig.* 20 e 21, *tav.* 6. Nel secondo caso la curva della palmola si potrà determinare in maniera analoga a quella esposta nel § 85 ed espressa nella *fig.* 10, *tav.* 7, prendendo per filo dello sprone non più una retta, ma una curva, e considerando le successive posizioni in cui essa dee passare nella sua rotazione intorno all'asse del maglio. Generalmente però, a motivo della picciolezza della *levata* del maglio a confronto della sua lunghezza, l'arco di circolo descritto da ciascun punto dello sprone, si può senza troppo errore considerare come una retta; ed allora la curva della palmola si confonde con la evolvente del circolo tangente alla retta medesima prolungata.

Ne' magli di fianco l'albero della ruota, invece di essere perpendicolare al piano in cui il maglio si muove, è parallelo a questo piano, ed i levatoi incontrano il manico del maglio ad angolo retto. Nella *fig.* 4 AB è il maglio, A la testa, B la boga, C la staffa, contro la quale vengono successivamente ad operare i levatoi F, F', F''. . . . , fitti sulla circonferenza della ruota RR. Le medesime lettere denotano le stesse cose nella *fig.* 5, che è un taglio fatto nella macchina tra la testa del maglio e la ruota de' levatoi, perpendicolarmente al piano della figura precedente. In questa figura si vede come il levatoio aggrappando in F la staffa del maglio la solleverà fino in G; se l'altezza FG si porterà verticalmente in FG (*fig.* 4), e si tireranno pel centro B dei perni le rette BF, BG, sarà GBF l'angolo di levata del maglio.

Facilmente si può riconoscere, che se la distanza PF (*fig.* 5) dell'asse dell'albero della ruota dal piano verticale del maglio, fosse eguale alla distanza BC (*fig.* 4) della staffa dai perni della boga, la linea retta sarebbe la figura più conveniente pel filo dei levatoi, i quali così conformati trasmetterebbero al maglio lo stesso moto equabile di rotazione da cui sono essi animati. Quando la distanza PF è maggiore o minore di BC (ed essa è ordinariamente assai minore), i levatoi rettilinei non trasmettono più il moto con ragione di velocità assolutamente costante: e tuttavia se l'angolo di levata non sarà troppo grande, gli svarii che verrà facendo la velocità angolare del maglio saranno assai piccoli, siccome si vedrà nel capitolo seguente, nel quale si parlerà delle ruote d'angolo a caviglie. Così supponendo che sia PR eguale alla metà di BC, si può formare la tavola seguente, nella quale si vede quale sia la velocità angolare del maglio in diverse posizioni successive di esso; gli angoli notati nella prima colonna sono quelli che fa coll'orizonte la retta BF condotta pei perni della boga e per lo spigolo dello sprone.

| Angolo all'orizonte. | Ragione della velocità angolare del maglio alla velocità angolare della ruota. |
|---|---|
| 0° | 0,500 |
| 4° | 0,505 |
| 8° | 0,519 |
| 12° | 0,543 |

Onde si vede, che limitando a otto gradi sopra e sotto l'orizonte l'inclinazione della retta BP, cioè limitando a 16° l'angolo totale di alzata del maglio, l'equabilità del suo movimento sarà quasi perfetta. Che se una più rigorosa equabilità di moto fosse necessaria, non sarebbe difficile ottenerla tagliando il filo della staffa secondo la evolvente del circolo primitivo del maglio, ed il filo del levatoio secondo la evolvente del circolo primitivo della ruota.

# CAPITOLO VENTESIMOSESTO

## TEORIA GEOMETRICA, E COSTRUZIONE PRATICA DELLE RUOTE D'ANGOLO, E DELLA VITE PERPETUA.

169. Quando un moto continuo di rotazione vuol trasmettersi fra due ruote collocate in piani tra loro perpendicolari, usansi sovente le ruote a corona di caviglie rappresentate nella *tav.* 11, *fig.* 17, le quali oltre al pregio della semplicità, per cui possono essere costrutte e ristaurate da ogni intelligente legnaiuolo, accoppiano pure quello di poter in alcuni casi rigorosamente, in altri con molta approssimazione, servire alla trasmissione *equabile* del movimento. La equabilità della trasmissione è rigorosa quando le due ruote che fanno incastro hanno lo stesso raggio, e per conseguenza la medesima velocità angolare; è approssimativo soltanto quando i raggi e le velocità delle due ruote sono diseguali; ma anche in questo caso non è difficile di ottenere una puntuale equabilità di movimento, sostituendo in una delle due ruote alle caviglie cilindriche, caviglie rastremate dalla base al vertice secondo un certo garbo determinato.

Sia C′CC″ (*tav.* 17, *fig.* 7) la circonferenza primitiva di una ruota a caviglia contenuta in un piano verticale, e mobile intorno all'asse orizontale eretto in A perpendicolarmente al piano della figura. Sia C una delle caviglie di cui essa è armata, e chiamiamo R il raggio della ruota, $r$ quello delle caviglie. Supponiamo che questa ruota AC′C″ debba communicare il movimento ad una seconda ruota dello stesso raggio contenuta nel piano orizzontale che taglia secondo la retta OO′ il piano verticale della prima. Rabattiamo questo piano orizzontale facendolo girare intorno alla retta OO′ finch'esso venga a coincidere col piano verticale, ed in questa posizione, sia D′DD″ la circonferenza primitiva della ruota condotta, D una delle sue caviglie di raggio $= r'$, II′ ed EFGH le proiezioni dell'asse A e della caviglia C della ruota conduttrice, fatte sul piano della ruota condotta. L'asse di questa seconda ruota sarà una retta innalzata nel punto B perpendicolarmente al piano del circolo D′DD″, e per conseguenza verticale, la quale, come scorgesi dalla figura, non incontrerà l'asse A, ma passerà alla distanza $\mathrm{BI}' = r + r'$ da esso.

Ciò posto, se la ruota A descriverà intorno al proprio asse un angolo qualunque CAC′ passando la caviglia C nella posizione C′, e proiettandosi il suo contorno sul piano orizzontale in E′F′G′H′, questa caviglia sospingerà la D in D′ facendo descrivere alla ruota B l'angolo DBD′; ora io dico che saranno eguali tra loro gli angoli CAC′, DBD′ descritti dalle due ruote. Infatti se dai centri C′, D′ delle due caviglie si abbassano le perpendicolari C′P, D′Q, queste perpendicolari, a motivo di $p\mathrm{Q} = q\mathrm{D}' = r + r'$, sono eguali tra di loro. Dunque, per essere eguali i raggi delle due ruote, sono pure eguali gli archi CC′, DD′, e gli angoli CAC′, DBD′ sottesi da questi archi.

Ma se le ruote fossero diseguali (*fig.* 8), appunto per essere ancora eguali le perpendicolari C′P, D′Q, l'arco DD′ preso sulla circonferenza minore riuscirebbe tanto più lungo dell'arco CC′, quanto più le due caviglie CC′ si venissero scostando dalla loro posizione primitiva, ed il moto della ruota minore sarebbe accelerato, qualora fosse equabile quello dell'altra ruota (1).

A questo inconveniente si può rimediare con l'artifizio rappresentato nella *fig.* 9, il quale consiste nel fare che il raggio della caviglia della ruota maggiore venga continuamente scemando dalla base alla punta, come si vede nella proiezione EFG del contorno della caviglia sul piano della

(1) Mettendo gli occhi sulla *fig.* 8 si scorge tosto, che, detti R, R′ i raggi delle due ruote, $\varphi$ e $\psi$ gli angoli contemporaneamente descritti da esse, sarà

$$R' \sin \psi = R \sin \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

qualunque sieno i raggi $r$, $r'$ delle caviglie. Gli angoli $\varphi$ e $\psi$ essendo, generalmente parlando, di non molta ampiezza alla equazione (1), potremo sostituire la seguente

$$R'\left(\psi - \frac{\psi^3}{6}\right) = R\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

dalla quale si trae il valor prossimo

$$R'\psi = R\varphi + \frac{1}{6}\left(\frac{R^2}{R'^2} - 1\right) R \varphi^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

onde supposto $R' < R$ l'angolo $\psi$ crescerà più rapidamente di ciò che si conviene per la equabilità del movimento. Tuttavia la differenza sarà assai piccola, purchè piccolo sia il *passo* di ambe le ruote, e non molto differenti i raggi R ed R′. Così, per esempio, posto $R = 2R'$, avremo

$$\psi = \frac{1}{2}\varphi\left(1 + \frac{1}{2}\varphi^2\right);$$

e supponendo che la ruota maggiore abbia quaranta caviglie, cioè che il valor massimo di $\varphi$ sia $= \frac{\pi}{20}$, lo svario massimo sul corrispondente valore di $\psi$ non sarà che di un quarantesimo circa del valore conveniente pel moto equabile.

ruota orizzontale (1). Poichè in grazia di questa disposizione l'arco DD' sarà sempre manifestamente un po' minore di ciò che sarebbe se la caviglia motrice fosse tutta di raggio uniforme, e tanto maggiore sarà il divario, quanto più scostandosi le due caviglie dalla posizione iniziale, verrà il loro punto di contatto a scostarsi dalla radice EF della caviglia rastremata, e ad avvicinarsi alla punta G di essa.

(1) Serbate tutte le denominazioni precedentemente stabilite, siano ancora $E'N = x$, $NM = y$ le coordinate del punto M della curva generatrice della superficie della caviglia motrice, che sarà in contatto con la caviglia condotta quand'esse avran descritti intorno agli assi delle due ruote gli angoli $\varphi$ e $\psi$. Osservando che il raggio D'M condotto dall'asse delle caviglie D' al punto M farà con la retta OO' che si prende per asse della $x$, e con la D'Q parallela a quest'asse un angolo di cui $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ sono il seno ed il coseno, avremo

$$D'Q = C'P - Qp + qD' ;$$

ossia

$$R' \sin\psi = R \sin\varphi - (r + r') + (r - x) + r' \frac{dy}{ds} \ldots\ldots (1).$$

$$NM = DQ - Mm ;$$

ovvero

$$y = R' (1 - \cos\psi) - r' \frac{dx}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) ;$$

e per conseguenza da queste due equazioni (1) e (2), e dalla

$$R\varphi = R'\psi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

eliminando i due angoli $\varphi$ e $\psi$ si otterrà tra $x$ ed $y$ l'equazione della cercata curva E'G'.

I raggi delle caviglie essendo molto piccoli a fronte di quelli delle ruote, e l'angolo $\varphi$ sempre poco considerevole, potremo nelle equazioni (1) e (2) senza error sensibile supporre $\frac{dy}{ds} = 1$, $\frac{dx}{ds} = o$, ed allora esse diverranno

$$R' \sin\psi = R \sin\varphi - x \; ; \quad R' \cos\psi = R' - y$$

170. Già nel capitolo quindicesimo abbiamo veduto come si possa trasmettere un moto equabile e continuo di rotazione tra due assi che s'incontrino con qualsivoglia angolo, per mezzo di due coni tronchi generati intorno a questi assi da una retta condotta convenientemente pel loro punto di concorso. La trasmissione del movimento in questo meccanismo si fa in virtù del solo attrito; qualora questo non basti a vincere le resistenze che contrastano il movimento della macchina, ai coni di superficie liscia converrà sostituire due coni scanalati, ossiano due ruote dentate coniche: e già è manifesto, che acciò i denti di queste ruote si tocchino

oppure trascurando i termini affetti da $\varphi^4$ e $\psi^4$ negli svolgimenti dei seni e dei coseni degli angoli $\varphi$ e $\psi$

$$R'\psi^3 - R\varphi^3 = 6x\ , \qquad R'\psi^2 = 2y\ ;$$

ed eliminando $\varphi$ e $\psi$ mercè della (3)

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{1 - \frac{R'^2}{R^2}\right\}\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{R'}} \ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots (4),$$

equazione della curva domandata.

Supponendo, per fare un esempio numerico, che la ruota maggiore debba avere 20 caviglie e raggio doppio di quello della compagna, la lunghezza di quelle dell'altra ruota dovrà essere $= R'(1 - \cos 36^\circ)$ $= 0,1910\,R'$, onde il valor di $x$ corrispondente alla estremità del dente sarà $x = 0,0295\,R'$; e siccome la ruota condotta avrà dieci caviglie, il suo passo sarà $= \frac{\pi R'}{5}$, ed il raggio $r'$ delle sue caviglie, eguale alla quarta parte del passo, sarà $= \frac{\pi R'}{20}$, onde il valore di $x$ verrà $= 0,188\,r'$.

In questo caso adunque il raggio delle caviglie dovrà venir scemando dalla radice alla punta nella ragione di 1000 : 812, ossia di 5 : 4 prossimamente.

su tutta la loro larghezza, cioè su tutta la lunghezza del lato dei due coni, sì i loro fianchi, come le loro coste dovranno essere terminati da superficie di forma conica aventi tutti i loro vertici nel punto di concorso dei due assi. Proponiamoci dunque di determinare le curve che dovranno prendersi per basi di queste superficie coniche, acciò il moto si trasmetta equabilmente, come appunto si trasmetterebbe tra i due coni *primitivi* in virtù del solo attrito. Alla quale determinazione ci condurrà il teorema seguente, che è una generalizzazione di quello del § 53, ed un caso particolare di quello enunciato nella nota al § medesimo.

Siano AP, BQ (*tav.* 19, *fig.* 1) due bracci perpendicolari agli assi AC, BC che si tagliano nel punto C, e tali che le distanze CP, CQ delle loro estremità P, Q dal punto C siano eguali tra loro; sia PQ un tirante di lunghezza invariabile: dico che, facendo girare il braccio AC intorno all'asse AC, il moto trasmesso all'altro braccio BQ sarà tale, che

1° Le velocità assolute dei due punti P, Q staranno tra di loro come le perpendicolari abbassate dai medesimi punti sulla comune intersezione CK dei due piani ACP, BCQ.

2° Le velocità angolari dei due bracci staranno tra loro in ragion reciproca delle perpendicolari abbassate sugli assi CA, CB da qualsivoglia punto della comune intersezione CT dei due piani ACB, PCQ.

La prima parte del teorema è conseguenza immediata di ciò che è stato dimostrato nella nota citata. Poichè ogni minimo movimento del tirante PQ si può riguardare come una rotazione fatta intorno alla comune intersezione dei due piani ACP, BCQ; e per conseguenza gli spazietti contemporaneamente descritti dai punti P, Q si ponno avere per due archi circolari di eguale ampiezza, epperò proporzionali ai raggi con cui sono descritti.

La seconda parte può pure dimostrarsi rigorosamente (1), quando a farne ammettere la verità non bastasse l'analogia manifesta ch'essa ha con la seconda parte del teorema del § 53, relativo alla trasmissione del movimento tra assi paralleli.

(1) Dal punto C come centro (*tav.* 19, *fig.* 2) intendasi descritta una superficie sferica, la quale passi pei punti P, Q e tagli in $a$, $b$ i prolungamenti degli assi CA, CB. I piani CAP, CBQ, CPQ, C$ab$ segheranno la superficie medesima secondo gli archi di circoli massimi $a$PK, Q$b$K, PTQ, $a$T$b$; e per la prima parte del teorema già dimostrato le velocità assolute dei punti P, Q staranno : : sin KP : sin KQ.

Epperò, dette $\omega$, $\omega'$ le velocità angolari dei due bracci AP, BQ, sarà

$$\omega : \omega' : : \frac{\sin \mathrm{KP}}{\sin a\mathrm{P}} : \frac{\sin \mathrm{KQ}}{\sin b\mathrm{Q}} ;$$

ovvero
$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin \mathrm{KP} \,.\, \sin b\mathrm{Q}}{\sin \mathrm{KQ} \,.\, \sin a\mathrm{P}} .$$

Ora i due triangoli sferici $a$PT, $b$QT danno

$$\sin a\mathrm{P} : \sin a\mathrm{TP} : : \sin a\mathrm{T} : \sin a\mathrm{PT} : : \sin a\mathrm{T} : \sin \mathrm{KPQ} ;$$

$$\sin b\mathrm{Q} : \sin b\mathrm{TQ} : : \sin b\mathrm{T} : \sin b\mathrm{QT} : : \sin b\mathrm{T} : \sin \mathrm{KQP} ;$$

onde
$$\frac{\sin b\mathrm{Q}}{\sin a\mathrm{P}} : 1 : : \frac{\sin b\mathrm{T}}{\sin a\mathrm{T}} : \frac{\sin \mathrm{KQP}}{\sin \mathrm{KPQ}}$$

Ma nel triangolo sferico KPQ si ha pure

$$\sin \mathrm{KQP} : \sin \mathrm{KPQ} : : \sin \mathrm{KP} : \sin \mathrm{KQ} ;$$

e per conseguenza la precedente proporzione diviene

$$\frac{\sin b\mathrm{Q}}{\sin a\mathrm{P}} : 1 : : \frac{\sin b\mathrm{T}}{\sin a\mathrm{T}} : \frac{\sin \mathrm{KQ}}{\sin \mathrm{KP}} ;$$

e per conseguenza

$$\frac{\sin b\mathrm{Q} \,.\, \sin \mathrm{KP}}{\sin a\mathrm{P} \,.\, \sin \mathrm{KQ}} = \frac{\sin b\mathrm{T}}{\sin a\mathrm{T}} = \frac{\omega}{\omega'} ,$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

Siano ora HKM, ILM due porzioni qualunque prese sulla superficie di una sfera di raggio MC (*tav.* 19, *fig.* 3), terminate da due perimetri curvi tangenti in M, e mobili intorno agli assi C$a$, C$b$ condotti pel centro C della sfera. Da questo centro C come vertice descrivansi le due superficie coniche CKHM, CILM; facendo girare il primo di questi coni intorno all'asse C$a$, il movimento si trasmetterà per contatto al secondo cono, il quale girerà intorno all'asse C$b$; si domanda la ragione delle velocità angolari dei due coni.

Pel punto di contatto M dei due perimetri dati, e nel piano tangente alla sfera si tiri la retta FF′ tangente alle due curve; quindi pel medesimo punto M si conduca il piano perpendicolare alla retta FF′, il quale verrà a passare pel centro C, e segherà la sfera secondo l'arco di circolo massimo NN′, il quale verrà incontrare in T l'altro arco di circolo massimo $ab$; dico, che le velocità angolari dei due coni staranno tra di loro in ragione reciproca delle perpendicolari abbassate dal punto T sugli assi C$a$, C$b$.

Infatti per essere le due curve HKM, ILM perpendicolari in M all'arco NN′, due piccolissimi archetti presi sovra queste curve di qua e di là del punto M potranno riguardarsi come archi di circolo aventi i loro centri sovra le rette condotte dal centro C a due punti P e Q convenevolmente scelti sull'arco NN′, e la trasmissione del moto si farà come se i punti P, Q fossero uniti da un tirante di lunghezza invariabile; ma in questa supposizione le velocità angolari dei due coni starebbero tra loro in ragion reciproca delle perpendicolari abbassate dal punto T sugli assi C$a$, C$b$; dunque sussisterà la medesima ragione pel caso che i due coni si sospingano per immediato contatto.

È quindi finalmente la conchiusione che andavamo cercando; che cioè affinchè il moto si trasmetta equabilmente tra i due coni, ossia affinchè rimanga costante la ragione delle loro velocità angolari, è necessario che in tutte le successive posizioni, che essi verranno prendendo nella loro rotazione, si mantenga invariabile la ragione delle perpendicolari abbassate sui due assi dal punto d'incontro dell'arco NN′ coll'arco *ab*; od in altri termini, che in tutte le posizioni del meccanismo sempre il piano normale alle basi dei due coni nel loro punto di contatto venga a tagliare l'arco immobile *ab* nel medesimo punto.

171. Resta che si ricerchino le curve, che adempiono la condizione ora enunciata; la qual cosa ci verrà fatta agevolmente considerando la generazione e le proprietà di quelle che chiamano *epicicloidi sferiche*, per analogia con le *epicicloidi piane*, delle quali abbiamo diffusamente ragionato nel capitolo ventesimo, e che ci hanno condotti alla soluzione pratica del problema della trasmissione equabile del movimento tra assi paralleli.

Sulla superficie di una sfera SS′S″ (*fig.* 4) segnisi una circonferenza qualunque di circolo SOO′S″D, il quale prendasi per base di un cono CSS″ col vertice nel centro C della sfera; segnisi somigliantemente sulla medesima superficie un'altra circonferenza qualsivoglia OEF tangente alla prima in O, e prendasi questo circolo per base di un secondo cono col vertice parimenti in C. Concepiscasi ora che, restando immobile il suo vertice, questo secondo cono ruzzoli appoggiandosi sul primo, per modo che tutti i punti della circonferenza OEF vengano successivamente ad applicarsi sulla circonferenza SOS″ con semplice contatto di sviluppo e senza scorrimento. Mentre l'arco OF verrà così a sovrapporre tutti i suoi punti sull'arco di egual lunghezza OO′, il punto F verrà in O′, ed il punto O, che dapprincipio era in contatto con SOS″ in O, passerà in M (posto che sia O′LM = O′O = OF), e descrivasi intanto sulla superficie sferica l'arco di curva OM; questa curva così descritta è quella, che porta il nome di *epicicloide sferica*.

Or mentre il punto O genera così la curva OM, la generatrice CO del cono mobile genererà nell'interno della sfera una superficie conica avente il suo vertice in C; giunta questa generatrice nella posizione CM, si conduca per essa e per la generatrice di contatto CO′ un piano CMO′, che taglierà la superficie della sfera secondo l'arco di circolo massimo MO′N. Dico che questo piano sarà perpendicolare alla tangente alla epicicloide nel punto M, e *normale* alla superficie del cono epicicloidale COM.

Infatti, mentre la circonferenza mobile O′ME′ viene applicando sulla circonferenza fissa SOS″ i punti contenuti nell'archetto infinitesimo contiguo al punto O′, il punto M si muove manifestamente in direzione perpendicolare al piano CMO′ generando l'archetto infinitesimo M$m$ di epicicloide; è dunque la tangente a questo archetto, perpendicolare a questo piano CMO′. Proprietà tutta analoga a quella che abbiam dimostrato aver luogo nelle curve epicicloidali piane, generate dal ruzzolare l'una sull'altra di due curve piane quali si vogliano (capitolo ventesimo, §§ 137, 138).

Se la circonferenza mobile OEF in vece di appoggiarsi sulla convessità della circonferenza fissa fosse contenuta entro di essa, oppure l'abbracciasse nella propria concavità, la curva generata prenderebbe il nome di *ipocicloide sferica.* Essa si muterebbe in *cicloide sferica* se il piano SOO′S″D si conducesse pel centro C della sfera, sicchè la superficie conica CSS″ si confondesse col piano medesimo; e diverrebbe una specie di *evolvente* del circolo fisso, se rimanendo questo uno qualunque de' circoli minori della sfera, si prendesse per circolo mobile un circolo massimo di essa (1).

(1) Pel polo P del circolo SOO′S″ (*fig.* 5) si conducano i tre circoli massimi POA, PO′A′, PM, e dicansi $\psi$ e $\theta$ gli angoli sferici APA′, APM; facciansi ancora $PO = \alpha$, $AO = \beta$, $PM = \varphi$.

Potremo prendere per coordinate del punto M l'angolo $\theta$ e l'arco $\varphi$. L'arco OO′ avendo per ampiezza $\psi$ e per raggio $\sin\alpha$, sarà $\psi \sin\alpha$ la

172. Siano ora CSOS', CDZZ' (*fig.* 6) due coni circolari aventi il vertice comune in C, i quali voglian prendersi per coni primitivi di due ruote dentate; e sia C$Dmi$ un terzo cono circolare qualunque tangente ai due primi secondo la generatrice comune CD. Siano DO, D$o$, D$m$ tre archi di eguale lunghezza, presi a partire dal punto D sulle circonferenze DS, D$mi$, DZ'Z delle basi dei tre coni, cosicchè facendo ruzzolare il cono C$mi$ sul cono CDS, il punto $m$ descriva sulla superficie della sfera di centro C e di raggio C$m$, una epicicloide sferica $m$O; e facendo ruzzolare il medesimo cono C$mi$ nell'interno del cono CZZ', lo stesso punto $m$ generi la ipocicloide sferica $mo$. Queste due curve $m$O, $mo$ avranno comune il punto $m$, e di più saranno in questo punto tangenti tra di loro; poichè le tangenti sì dell'una, che dell'altra curva saranno perpendicolari al piano CD$m$, epperò coincideranno. Se immaginiamo, che siano O$pnm$, $oqnm$ le super-

sua lunghezza, e tale sarà pure la lunghezza dell'arco O'LM; ma questo avendo per raggio sin $\beta$, la sua ampiezza e l'angolo PA'M avranno per valore

$$\mathrm{PA'M} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,.\,\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

epperò, il triangolo sferico PA'M darà

$$\cos\varphi = \cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \sin\beta\,.\,\sin(\alpha+\beta)\,.\,\cos \mathrm{PO'M} \ldots (2);$$

$$\text{e} \quad \cot\!\text{ang}(\psi-\theta) = \frac{\cos\beta\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta\cos(\alpha+\beta)\cos \mathrm{PO'M}}{\sin\beta\,.\,\sin \mathrm{PO'M}} \;.\; (3).$$

Dalle 3 equazioni (1), (2), (3) eliminando PO'M e $\theta$, risulterebbe l'equazione della epicicloide sferica; nelle medesime equazioni ponendo $-\beta$ invece di $\beta$ si avrebbe il caso della *ipocicloide;* ponendovi $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, quello della *cicloide sferica;* e ponendovi $\beta = \frac{1}{2}\pi$ quello della *evolvente.*

Supponendo poi infinito il raggio della sfera, e chiamando $a$, $b$ quelli del circolo fisso e del circolo mobile, ed $r$ il raggio vettore del punto M, ficie generate dalla parte *mn* della generatrice C*m*, mentre il punto *m* genera gli archi epicicloidali O*m*, *om*, queste due superficie passeranno entrambe per *mn* e si toccheranno secondo questa medesima retta.

Se dunque faremo costruire e fermare sul cono CSS′ una laminetta metallica così piegata, che si applichi puntualmente sulla porzione di superficie conica O*pnm*; e se faremo scolpire sull'altro cono CZZ′ un solco diretto dalla base al vertice secondo la generatrice *m*C, e la cui parete o sponda segua esattamente il garbo dell'altra superficie conica *oqnm*; collocando i due coni in guisa che vengano in contatto le loro generatrici CO, C*o*, poi facendo girare il primo cono CSS′ intorno al suo asse CPA′, la lamina O*pnm* fissa su questo cono, premerà contro la sponda del solco scolpito sull'altro cono, e communicherà a questo un moto rotatorio intorno al suo asse CB; ed in tutte le posizioni, per cui passeranno i due coni, il

dovranno farsi nelle equazioni precedenti $\sin\alpha = a$, $\sin\beta = b$, e $\sin\varphi = r$; e le curve epicicloidali sferiche si muteranno nelle corrispondenti curve piane.

Infatti l'equazione (2) può scriversi sotto la forma

$$\cos\varphi = \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\left(1 - \cos\frac{a\psi}{b}\right);$$

e facendo in essa

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}r^2, \quad \text{e} \quad \cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}a^2,$$

si muterà nella

$$r^2 = a^2 + 2b(a+b)\left(1 - \cos\frac{a\psi}{b}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (2').$$

Similmente la (3), messovi $\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) = 1$, ci darà

$$\operatorname{cotang}(\psi - \theta) = \frac{a + b\left(1 - \cos\frac{a\psi}{b}\right)}{b\sin\frac{a\psi}{b}} \ldots\ldots\ldots\ldots (3').$$

equazioni identiche con le (I) e (III) della nota al § 129.

piano normale alla lamina dell'uno ed alla sponda dell'altro, secondo la loro linea di contatto, verrà sempre a passare per la generatrice di contatto CD dei due coni; epperò questo piano normale dividendo sempre nella stessa ragione l'angolo A'CB dei due assi, anche le velocità angolari dei due coni staranno sempre nella stessa ragione.

Da ciò si conclude, che

Due ruote coniche si condurranno equabilmente, purchè i loro denti sieno conformati in guisa, che la *costa* di quello della ruota movente ed il *fianco* di quello della ruota *cedente* sieno intagliati secondo due superficie coniche epicicloidali generate da un terzo cono qualunque, che si faccia ruzzolare sulla *convessità* del cono *movente*, e nella *concavità* del cono *cedente*.

E quindi ancora:

Dati i coni primitivi di due ruote d'angolo, prendendo per centro il vertice, per raggio il lato, comuni ai due coni, si descriva una superficie sferica; su questa superficie si segnino la *epicicloide* e la *ipocicloide sferiche* generate dal rotolare di uno stesso circolo (preso ad arbitrio) sulla convessità della circonferenza della base del cono movente, e nella concavità della circonferenza della base del cono cedente. Prendansi queste due curve per basi di due superficie coniche aventi il vertice comune coi due coni primitivi; le superficie coniche così determinate saranno quelle, secondo le quali dovranno foggiarsi la costa del dente della ruota movente, ed il fianco di quello della ruota cedente.

173. Il § che precede contiene la rigorosa costruzione dei denti delle ruote coniche; ma a motivo del piccolissimo *rilievo* di questi denti rispetto al raggio della sfera usata a descriverli, le zone sferiche, sulle quali il loro profilo epicicloidale si troverà tracciato, saranno tanto strette, che potranno senza error sensibile confondersi con due zone coniche tangenti alla sfera. Pel punto D (*fig.* 6) si conduca nel piano BCA dei due assi la retta BDA perpendicolare alla genera-

trice comune CD dei due coni primitivi; prendendo su questa retta di qua e di là di D due piccole porzioni D*b*, D*b'*, e facendo girare la retta AB successivamente intorno ai due assi CA', CB, la porzione D*b'* genererà intorno al primo asse una zona conica tangente alla sfera secondo la circonferenza SDS'; e la porzione D*b* genererà similmente intorno al secondo asse un'altra zona conica, che sarà pur tangente alla sfera secondo la circonferenza ZDZ'. Queste due zone coniche si potranno sostituire alla superficie della sfera sottoposta, e sovra di esse potranno supporsi descritte le curve epicicloidali O*m*, *om* generate dalla rotazione del circolo D*mi* sul circolo SDS', e nel circolo ZDZ'.

Questa osservazione suggerì a Tredgold una facile costruzione approssimativa, la quale venne poi generalmente adottata, e che noi passiamo a descrivere (1).

174. Siano CA CB gli assi concorrenti in A dei due coni primitivi CDE, CDF (*fig.* 7), i quali si tocchino secondo la generatrice comune CD. Pel punto D e nel piano ACB conducasi

(1) La costruzione di Tredgold, come tosto si vedrà, riposa tutta sul supposto, che svolgendo in piano una stretta zona sferica, considerata come conica, sulla quale sia stata prima segnata una piccola porzione di epicicloide sferica, questa curva, nello sviluppo piano si confonda sensibilmente con una epicicloide piana avente per deferente l'arco di circolo sviluppo della base del cono. Questa supposizione non è geometricamente esatta, come è facile di accertarsene, deducendo dalle equazioni della epicicloide sferica riferite nella nota precedente, quelle della curva piana che si ottiene sviluppando in piano la zona sferica strettissima sulla quale la curva si suppone descritta; infatti le equazioni che si otterranno così non saranno identiche con quelle di una epicicloide piana qualunque. Ma il divario sarà tanto minore: 1° Quanto meno ampia sarà la zona sviluppata; 2° Quanto minore sarà l'angolo compreso tra l'asse del cono fisso e quello del cono generatore della epicicloide sferica. Ad ogni modo il consenso di tutti i costruttori, che da circa trent'anni seguono con buon successo la pratica suggerita da Tredgold, dimostra abbastanza, che la inesattezza di essa non ha inconveniente sensibile nelle applicazioni.

la retta $ab$, perpendicolare a CD, e siano $a$, $b$ i punti in cui essa incontra i due assi CA, CB. Intendiamo poi, che la parte D$a$ di questa retta si faccia girare intorno all'asse CA, e la parte D$b$ intorno all' asse CB. Queste due rette genereranno così due coni D$a$E, D$b$F co' loro vertici in $a$, $b$: sulle superficie di questi due coni, che per brevità di discorsi chiameremo d'or innanzi *coni complementari*, noi dovremo ora tracciare i profili delle dentature di cui debbono armarsi i due coni primitivi.

È noto dalla geometria che la superficie curva di un cono circolare si può sviluppare in piano, e che la figura di questo sviluppo è un settore di circolo, il quale ha per raggio il *lato* del cono sviluppato, ed è terminato da un arco di lunghezza eguale a quella della circonferenza della base del medesimo cono. Se dunque intenderemo che la superficie del cono *complementare* D$a$E si sia spaccata secondo il lato D$a$, e quella del cono complementare D$b$F secondo il lato D$b$, e che le due superficie si siano sviluppate e distese sul piano condotto pel punto D perpendicolarmente a CD, noi otterremo così i due settori circolari DE'E$ea$, DF'F$fb$, ne' quali gli archi DE'E$e$, DF'F$f$ saranno rispettivamente eguali alle circonferenze che hanno per diametri le linee DE, DF, cioè alle circonferenze delle basi comuni ai coni primitivi DCE, DCF, ed ai corrispondenti coni complementarii D$a$E, D$b$F.

Consideriamo i due archi DE'E$e$, DF'F$f$, che si toccano in D come circoli primitivi di due ruote che debbano condursi a vicenda. Dividiamo ciascuno di questi archi in tante parti eguali, quanti sono i denti che debbon farsi al cono corrispondente, e ciascuna di queste parti sarà eguale al passo. Quindi, con una qualunque delle regole precedentemente insegnate disegniamo le dentature di queste due ruote piane, determinando la lunghezza dei denti e la profondità dei vani in modo che le due ruote siano capaci di condursi per un conveniente arco di azione, prima e dopo della linea dei centri. Supponiamo che D$k$, D$i$ siano la lunghezza dei denti della ruota $a$ al difuori della circonferenza primitiva e la profondità de' suoi vani; poichè le ruote fanno giusto incastro, la lunghezza o sporto D$k$ del dente della ruota $a$ sarà eguale alla profondità dei vani della ruota $b$, e viceversa lo sporto D$i$ del dente di questa sarà eguale alla profondità del vano della prima. Finalmente co' raggi $ap$, $bq$ un po' minori di $ai$, $bh$, descriviamo i due archi $pp'p''$, $qq'q''$.

Si frastaglino ora con le forbici le due corone dentate DD'E'E$ep''p'p$, DF'F$fq''q'q$, che supporrò sieno state disegnate sopra sottile lastra di ottone, e conducendo a contatto le estremità D$e$, D$f$, s'inviluppino le corone così chiuse sui corrispondenti coni complementari D$a$E, D$b$F, in modo che gli archi DE$d$, FE$f$ si applichino esattamente sulle circonferenze delle basi dei due coni: i denti D$h$, D$i$ sporgeranno all'infuori di queste circonferenze, e se ne' due coni si scaveranno dei solchi corrispondenti ai vani delle due corone, in modo che i denti dell'una possano trovare libero gioco fra quelli dell'altra, si saranno formate così due ruote coniche, capaci teoricamente parlando di condursi regolarmente, ma di spessezza eguale soltanto a quella della lastra in cui le corone sono state intagliate, epperò insufficienti a reggere al menomo sforzo.

Per dare alle due ruote la necessaria spessezza converrà ora segnare questa spessezza sugli assi CA, CB in AG, BL, recidere i due coni primitivi secondo i piani $mn$, $m'n$ perpendicolari a CA, CB: ritenere per formarne le due ruote i soli tronchi DE$mn$, DF$nm'$: e finalmente sulle superficie di questi tronchi si dovranno riportare secondo le direzioni dei lati, dei listelli destinati a formare i denti salienti, i quali abbian per basi i denti D$h$, D$i$ delle corone, avvertendo che tanto questi denti di riporto, quanto i vani scolpiti nella sostanza dei due tronchi si vadano gradatamente stringendo dalla base inferiore alla base superiore dei tronchi, poichè le superficie ondulate delle due ruote, debbono essere generate ciascuna dal movimento di una linea retta, la quale passando sempre pel vertice C del cono primitivo, si appoggi continuamente sul profilo della dentatura della corona inviluppata sul cono *complementare*.

Praticamente, volendo costruire due ruote coniche sopra due coni primitivi dati, si disegneranno gli sviluppi de' coni complementari corrispondenti; si segneranno su questi sviluppi le dentature convenienti; poi si faranno tornire due ruote tali, che possano in esse scolpirsi i denti ed i vani, senza che occorra riportarvi denti salienti.

La *fig.* 8, *tav.* 19 rappresenta un incastro di due ruote coniche ad assi rettangolari compiute di tutto punto. La *fig.* 9 mostra una di queste ruote di prospetto; e la *fig.* 10 la sezione fatta in essa da un piano condotto per l'asse.

175. La vite perpetua e la ruota con cui essa fa incastro potendo considerarsi come due ruote sghembe, destinate a trasmettere il moto di rotazione tra due assi non concorrenti in un punto, e contenuti in due piani tra loro perpendicolari, accennerem qui brevemente il principio teorico dal quale la loro costruzione dipende.

Facendo nel meccanismo una sezione che passi per l'asse della vite, e sia per conseguenza perpendicolare a quello della ruota, segandolo cioè secondo la retta XX (*tav.* 19, *fig.* 12), la figura del taglio riuscirà quale si vede rappresentata nella *fig.* 11 a destra della verticale X'X'. Questo taglio offre l'aspetto dell'incastro di una ruota piana con una dentiera rettilinea, epperò i profili sì del dente della ruota, che del verme della vite vogliono determinarsi mercè delle medesime regole che abbiamo insegnate per questo incastro. Egli è infatti manifesto che, mentre la vite gira intorno al suo asse, le successive sezioni meridiane, che vengono a cadere nel piano della ruota, hanno tutte identicamente il medesimo profilo, e non differiscono l'una dall'altra se non in ciò che esse vanno, per dir così, avanzandosi verso di una delle estremità della vite; epperò nel girar di questa la posizione del punto di contatto tra il suo pane ed il fianco dei denti della ruota varia nello stesso modo, come se la vite non avesse verun moto rotatorio, e si facesse in vece scorrere parallelamente al proprio asse a guisa di dentiera.

Facciasi ora una seconda sezione parallela alla prima, ma fuori dell'asse della vite; quanto maggiore sarà la distanza di questa sezione dall'asse, tanto più il profilo che si otterrà per la vite differirà da quello della sezione precedente, diventando i suoi denti sempre più allungati, e le due coste di ciascuno di essi sempre meno simmetriche tra di loro, come si è procurato di esprimere nella *fig.* 11, nella quale la parte a sinistra della verticale X'X' rappresenta appunto una tal sezione fatta fuor dell'asse della vite. Or non può variarsi il profilo di una dentiera, senza che si debba pur di necessità variare quello della ruota compagna; epperò l'incastro della vite perpetua e della ruota ha ciò di singolare che, non solamente i denti di questa debbono sulla grossezza di essa scolpirsi obliquamente all'asse, acciò possan seguire l'obliquità del pane della vite, ma sì ancora debbono avere profili continuamente differenti da una sezione all'altra.

Teoricamente non vi ha difficoltà a determinare per ognuna di queste sezioni la forma che conviene al dente della ruota, data che sia quella del pane della vite, e per conseguenza di ognuna delle sezioni in essa fatte da piani paralleli all'asse. Ma immense e forse insuperabili sarebbero le difficoltà di esecuzione, se volesse costruirsi una tal ruota in guisa che uscisse perfetta dal gitto o dall'opera del cesello. Un facile spediente ovvia a queste difficoltà. Formasi una vite d'acciaio perfettamente identica a quella che dee accoppiarsi alla ruota, e la superficie del suo pane si intaglia a modo di lima; poi essa viene convenientemente temprata. Preparasi poi la ruota abbozzandone grossolanamente i denti in guisa che in ogni punto di essi sovrabbondi la materia. Su questa ruota così abbozzata, si fa agire la *vite-lima*, collocando questa nella posizione che la vite effettiva dovrà poi occupare (ma però un po' più discosta dall'asse della ruota); e poi girando la vite come se altro non si volesse che trasmettere il movimento alla ruota, i cui denti vengono così intaccati e rosi dall'azione della lima; di mano in mano che questi si consumano, si accosta sempre più la vite al centro della ruota fintantochè sia venuta nella giusta posizione che la vite effettiva dovrà occupare; ed allora i denti della ruota troverannosi esattamente ridotti alla forma conveniente.

## CAPITOLO VENTESIMOSETTIMO

### DELL'USO DEI TIRANTI PER LA TRASMISSIONE DEL MOTO CON RAGION COSTANTE DI VELOCITÀ, E DELLA COSTRUZIONE APPROSSIMATIVA DELLE RUOTE DENTATE.

176. La teorica della trasmissione del moto per via di tiranti esposta nel capitolo nono rende ragione degli effetti, non solamente de' tiranti, ma d'infiniti altri meccanismi; ogni meccanismo semplice, infatti, il quale operi per via di cingoli o di immediato contatto, può sempre ridursi col pensiero ad un sistema di due braccia mobili intorno a due centri e connesse con un tirante; della quale riduzione abbiamo dato nel corso di questo trattato più d'un esempio. Noi non abbiam nulla da aggiungere a quella teorica; ma la varietà e l'importanza delle applicazioni di cui i tiranti sono suscettivi, ci consigliano ora di entrare in più minuti particolari sull'uso di essi, e sulle principali conseguenze che da quella teorica derivano.

Si è dimostrato nel capitolo citato, che, quando due braccia AP, BQ, mobili intorno a' centri A, B, (*tav.* 20, *fig.* 1) si tramandano il movimento per mezzo di un tirante PQ, prolungata la direzione di questo finch'essa incontri in T la linea AB dei centri, ed abbassata sulla direzione medesima la perpendicolare KL dal punto K in cui i prolungamenti delle due braccia s'incontrano:

1° Le rotazioni delle due braccia si faranno per versi contrari o per lo stesso verso, secondo che il punto T cadrà tra i due centri A, B, oppure da una parte o dall'altra di essi e fuori dell'intervallo AB.

2° Le velocità angolari delle braccia AP, BQ saranno inversamente proporzionali ai segmenti TA, TB della linea dei centri, od alle perpendicolari AH, BI, abbassate dai centri A, B sulla direzione del tirante.

3° Le velocità assolute dei punti P, Q saranno direttamente proporzionali alle distanze PK, QK del punto d'incontro delle direzioni delle due braccia dalle articolazioni P, Q.

4° Finalmente due posizioni successive e vicinissime del tirante si taglieranno nel punto L, su cui cade la perpendicolare KL abbassata dal punto K sulla direzione del tirante.

Quindi agevolmente si conchiude, che generalmente la ragione delle velocità delle due braccia andrà continuamente variando; poichè col muoversi del tirante il punto T si trasporterà innanzi o indietro lungo la linea de' centri, e varierà la ragione delle distanze TA, TB; e similmente aprendosi o chiudendosi gli angoli in P, Q del triangolo PKQ, varieranno le lunghezze PK, QK e la ragione di queste lunghezze. Muovendosi adunque uno dei due bracci equabilmente, l'altro braccio, generalmente parlando, avrà moto accelerato o ritardato; havvi però un caso in cui il moto si trasmette equabilmente in tutte le posizioni della macchina.

Supponiamo infatti (*tav.* 20, *fig.* 2), che sieno eguali tra loro le lunghezze AP, BQ delle braccia, e che il tirante PQ sia eguale alla distanza AB dei due centri; allora, qualunque sia la posizione della macchina, la figura APQB sarà un parallelogramma; i lati AB, PQ saranno dunque paralleli, cioè s'incontreranno a distanza infinita, e per conseguenza le distanze del loro punto d'incontro dai centri A, B saranno eguali tra loro; saranno dunque anche eguali tra loro le due velocità angolari, e la trasmissione del movimento sarà equabile.

Si osservi tuttavia, che a ciascuna posizione del braccio movente AP possono corrispondere due posizioni del braccio cedente; infatti, se dal punto P come centro (*fig.* 3) si descriverà un arco di circolo QQ′ con raggio eguale alla lunghezza del tirante, quest'arco taglierà in due punti Q, Q′ la circonferenza descritta dall'estremità del braccio cedente; e così quando il movente si trova in AP, il cedente potrà egualmente trovarsi in BQ, oppure in BQ′. Nel primo caso, i due bracci andranno per lo stesso verso, e la trasmissione del moto si farà con ragion costante di velocità, siccome abbiamo or ora dimostrato; ma nel secondo caso, cadendo il punto T tra A e B, i due moti saranno opposti, e variando continuamente le distanze TA, TB, varierà pure in egual modo la ragione delle velocità.

Consideriamo particolarmente ciò che avviene quando il braccio movente si trova in A$p$ sulla linea dei centri AB. Allora se dal centro $p$ con raggio eguale ad AB si descrive un archetto di circolo, esso invece di tagliare in due punti la circonferenza descritta dal braccio condotto, tocca questa circonferenza nel solo punto $q$ collocato sul prolungamento della linea dei centri; epperò alla posizione A$p$ del braccio conduttore, corrisponde una sola posizione possibile B$q$ pel braccio condotto; ma appena il primo braccio avrà oltrepassata la posizione A$p$, torneranno ad esser possibili pel secondo braccio due posizioni diverse, l'una di qua, l'altra di là dalla linea dei centri, cioè continuando AP a muoversi per lo stesso verso di prima, potrà BQ o continuare esso pure il suo primo movimento, oppure prendere un moto opposto, passando il tirante dalla posizione parallela ad AB alla posizione obbliqua o viceversa, e cambiandosi il moto da equabile in vario, o da vario in equabile.

La stessa cosa può avvenire nell'istante in cui il braccio AP passa per la posizione A$p'$ ed il braccio BQ per la posizione B$q'$; epperò nelle macchine che esaminiamo vi ha due posizioni nelle quali, continuandosi il moto equabile e diretto del braccio conduttore, il moto del braccio condotto può o continuarsi esso pure equabile e diretto, o, tutto a un tratto, diventare retrogrado e vario; queste due posizioni si chiamano *punti morti*, e sono quelle in cui i due bracci cadono sulla linea dei centri, o sul suo prolungamento, ed il tirante si trova per conseguenza disteso su questa medesima linea retta.

177. Non occorre dimostrare quanto incomode e dannose possano essere queste repentine mutazioni del moto del pezzo condotto; e quindi i meccanici hanno dovuto ricercare i mezzi di rimuoverne il rischio; la qual cosa è stata fatta da essi in più modi.

Il primo e più semplice artificio consiste nell'aggiungere ai due bracci AP, BQ un terzo braccio eguale CR (*fig.* 4) mobile intorno a qualsivoglia punto C della linea de' centri AB, e connesso col punto R del tirante, in modo che sia PR eguale ad AC, e QR eguale a BC. La figura stessa indica chiaramente il perchè con l'aggiunta del braccio CR resti vietata al tirante ogni posizione obliqua, ed esso si trovi costretto a camminar sempre parallelo ad AB.

Il terzo centro C si può pur collocare fuori della linea che unisce i due primi A, B (*fig.* 5), purchè al semplice tirante rettilineo PQ degli esempli precedenti si sostituisca un telaio triangolare PQR, che abbia i suoi lati PQ, PR, QR rispettivamente eguali alle distanze AB, AC, BC dei centri A, B, C.

Un altro mezzo di pervenire al medesimo fine consiste nell'unire due o più coppie di braccia con altrettanti tiranti, in modo che quando una coppia passa per un punto morto, le altre trovandosi fuori della linea de'centri possano costringere la prima a trasmettere il movimento equabile e diretto. Così nella *fig.* 6 sull'asse AC sono fermate due braccia AP, CR entrambe perpendicolari all'asse, ma collocate in due piani che fanno tra loro un angolo retto, e in egual modo sono fermati sull'asse BD parallelo ad AC i due bracci BQ, DS rispettivamente eguali e paralleli ad AP, CR, ed uniti con essi per via de' tiranti PQ, RS, eguali alla distanza AB dei due assi.

Quando i due bracci AP, BQ cadono nel piano ABCD dei due assi, essi trovansi in un punto morto: ma l'altra coppia di braccia CR, DS, che allora è perpendicolare al piano medesimo, costringe il tirante PQ a superare il punto morto, senza ch'ei possa passare in una posizione obliqua.

Con questa disposizione, se il moto deve trasmettersi indefinitamente per lo stesso verso, i due assi AD, BC non ponno prolungarsi nè da una parte, nè dall'altra fuori dell'intervallo compreso fra i due piani paralleli ABQP, CDSR ne' quali si muovono le quattro braccia; essa è perciò poco suscettiva di applicazioni pratiche, alle quali molto meglio si confà l'altra disposizione rappresentata nella *fig.* 7. I due alberi AC, BD, di lunghezza indefinita, sono qui ripiegati a squadra ne' punti $a$, $e$, $f$, $c$, $a'$, $e'$, $f'$, $c'$, $b$, $g$, $h$, $d$, $b'$, $g'$, $h'$, $d'$, in guisa da formare due manovelle doppie, collocate in piani tra loro perpendicolari, ed unite per via de' tiranti eguali PQ, RS.

Lo stesso effetto ancora si ottiene in modo analogo con un meccanismo, equivalente a due manovelle triplici, che si vede rappresentato in prospetto ed in pianta nella *fig.* 8.

Ai due alberi orizzontali e paralleli A, B sono fermati due eguali dischi piani o ruote PRV, QSX in modo che essi cadano in piani paralleli alquanto distanti uno dall'altro; i due alberi non si prolungano al di là dei dischi dalla parte delle facce per cui essi dischi scambievolmente si guardano; sulle circonferenze di queste facce medesime, ne' punti P, R, V, e Q, S, X sono impernati i capi di tre tiranti, eguali alla distanza AB dei centri delle due ruote, in modo che gli archi PR, RV, VP sieno rispettivamente eguali agli archi QS, SX, XQ. Con ciò i tre tiranti si manterranno sempre paralleli, e l'obliquità loro rispetto ai dischi, cagionata dalla lontananza de' piani di questi, permetterà ch'essi possano continuare il loro movimento senza mai incontrarsi e farsi inciampo a vicenda.

178. Ho supposto finquì, che la trasmissione del moto si dovesse proseguire indefinitamente per lo stesso verso, nella quale supposizione non vi ha altro mezzo di ottenere una ragion costante di velocità, salvo quello che ho indicato, cioè di far le braccia eguali tra loro, e il tirante eguale alla linea dei centri. Ma se il moto che si ha da trasmettere sarà molto limitato, cioè se le estremità delle braccia avranno da percorrere archi molto brevi, cosicchè possano senza errore di conto riguardarsi questi archi come linee rette perpendicolari alle direzioni delle braccia, allora sarà sempre possibile di ottenere una trasmissione di moto sensibilmente equabile, senza astringersi alla condizione di fare le braccia eguali e parallele.

Sieno AP, BQ (*fig.* 9) due braccia così disposte, che la perpendicolare calata dal punto K sulla direzione del tirante venga a cadere nel punto T, in cui questo incontra la linea dei centri AB; se il braccio AP si moverà per un piccolo angolo passando nella posizione A$p$, il braccio BQ passerà in B$q$ e la ragione delle velocità sarà press'a poco costante dal principio al fine di questo movimento. Infatti per essere T il piede della perpendicolare KT abbassata dal punto K sul tirante, sarà esso l'intersezione di due successive posizioni del tirante, e per conseguenza questo incontrerà la linea de' centri sensibilmente nel punto T a tutti gl'istanti del moto, epperò la ragione delle velocità angolari delle due braccia si manterrà costante ed eguale a quella dei segmenti AT, BT.

Nella *fig.* 9 il punto T cade fra A e B, e le braccia stanno una di qua, l'altra di là della linea dei centri; ma il medesimo ragionamento si applica alla disposizione della *fig.* 10, nella quale il punto T è fuori dell'intervallo AB, e le due braccia sono entrambe dalla medesima parte della linea dei centri.

Da ciò deducesi la regola seguente:

Per trasmettere da un braccio all'altro un moto rotatorio equabile di poca ampiezza, si divida la linea dei centri AB in due parti AT, BT, inversamente proporzionali alle velocità angolari delle due braccia, e pel punto T si conducano ad arbitrio due rette tra loro perpendicolari PQ, KH; da qualsivoglia punto K della seconda si conducano le rette indefinite KA, KB, e segnando i punti P, Q in cui esse incontrano la retta PQ, saranno AP, BQ le cercate posizioni delle due braccia, e PQ il tirante che le dee unire.

Con questa regola le due braccia avranno velocità dirette per versi contrari; s'esse dovessero girare pel medesimo verso, il punto T dovrebbe prendersi fuori dell'intervallo AB dalla parte del braccio che dee girar più veloce, e in modo che le distanze AT, BT fossero sempre inversamente proporzionali alle velocità angolari delle braccia AP, BQ.

Se il punto K si supporrà infinitamente lontano da T, le due rette KA, KB riusciranno parallele tra loro ed alla KT e per conseguenza perpendicolari al tirante PQ; e questa è la più semplice maniera di disporre le braccia in guisa da ottenere per un breve tratto una equabile trasmissione di movimenti. Le *fig.* 11 e 12 rappresentano la disposizione di cui parliamo, pe' due casi de' moti rotatorii volti dalla stessa parte, e da parti contrarie.

179. Quando si debbono cangiare la velocità e la direzione di un moto rettilineo poco esteso si fa uso frequente di due braccia fermate sul medesimo asse in modo che non possa variare l'angolo ch'esse fanno tra di loro. Fingasi per esempio, che un breve moto rettilineo diretto secondo OM (*figg.* 13 e 14) si debba trasformare in un moto rettilineo più celere o più lento, e diretto secondo NO. Sulle direzioni OM, ON si portino le lunghezze OH, OI inversamente proporzionali alle velocità assolute dei due movimenti rettilinei, e si faccia il parallelogramma OHLI. Da qualunque punto A della diagonale OL si abbassino sulle direzioni date le perpendicolari AP, AQ; se si costruirà una falsa squadra, o squadra

zoppa PAQ, le cui braccia sieno rispettivamente eguali a queste perpendicolari, e facciano tra loro l'angolo PAQ, fermandone il vertice in A, ed attaccando ai punti P, Q i due cordoni PM, QN, il moto si trasmetterà dall'uno all'altro con la voluta ragione di velocità assolute. Infatti le due braccia essendo invariabilmente connesse descrivono nello stesso tempo angoli dello stesso numero di gradi, epperò le velocità assolute de' punti P, Q sono proporzionali ai raggi AP, BQ; ma è facile di scorgere che

$$AP : BQ :: OI : OH$$

e che per conseguenza le velocità angolari delle due braccia stanno esse pure nella medesima ragione di OI ad OH.

Quando le direzioni date sono parallele, il meccanismo si riduce ad una semplice linea retta mobile intorno ad uno de' suoi punti; se i due cordoni PM, NQ debbono camminare per versi contrarii (*fig.* 16), le due braccia AP, AQ cadono di qua e di là del centro del moto A; se i due cordoni PM, NQ debbono andare pel medesimo verso (*fig.* 15), i due punti P, Q cadono dalla medesima parte del centro del moto. In ambi i casi poi le velocità assolute de' due cordoni stanno in ragione diretta delle loro distanze dal centro.

La *fig.* 1, *tav.* 21 mostra come si possa trasformare un breve moto rettilineo diretto secondo PM, in un altro moto rettilineo secondo QN, quando queste due direzioni cadono in piani differenti. L'asse AB debb'esser parallelo alla comune perpendicolare alle due rette PM, QN. I due bracci AP, BQ, perpendicolari alle date direzioni PM, QN, debbono trovarsi in due piani condotti perpendicolarmente all'asse, l'uno per la retta PM, l'altro per la retta QN; e le lunghezze di queste braccia debbon essere direttamente proporzionali alle date velocità assolute dei due movimenti. Le cose dette finqui suggeriranno i mezzi di adempiere tutte queste condizioni.

Finalmente, quando saranno dati due assi CC′ DD′ (*tav.* 21, *fig.* 2) collocati in piani differenti, e si vorrà per mezzo di un tirante trasformare un moto rotatorio di poca ampiezza fatto intorno al primo asse, in un moto rotatorio intorno al secondo asse, con ragione di velocità sensibilmente costante, si procederà così. Condotta la CD comune perpendicolare ai due assi, si tirerà pel punto D la retta DH parallela a CC′; si porteranno le lunghezze DH, DI direttamente proporzionali alle velocità angolari intorno ai due assi CC′, DD′ e si compirà il parallelogramma HDIL. Da un punto qualunque Q della diagonale di questo parallelogramma si tireranno le perpendicolari QB, QE sui lati DI, DH; dal punto E s'innalzerà EA parallela a CC′, e pel punto A si tirerà AP eguale e parallela ad EQ; saranno AP, BQ le direzioni e le lunghezze delle braccia da fermarsi ai due assi, e PQ il tirante.

180. Noi ci siamo ora aperta la via alla costruzione di palmole terminate da archi di circolo e capaci di trasmettersi il moto per breve tratto, con ragione di velocità sensibilmente costante. Sia A (*tav.* 21, *fig.* 3) il centro del pezzo conduttore; B il centro del pezzo condotto; T il punto di contatto dei loro lembi curvi. Per questo punto T si tiri ad arbitrio la retta PQ, e fatto centro in qualsivoglia punto P di questa retta, si descriva con raggio PT l'archetto circolare *mm′*, e debba esser questo il lembo del pezzo conduttore. Per la natura del circolo sarà PQ normale all'arco *mm′* nel punto T, epperò questa retta sarà la *linea di azione.*

Nel punto T si conduca ancora la retta indefinita TK perpendicolare a PQ, e pei punti A, P si tiri APK fino al suo incontro con TK. Finalmente dal punto K si tiri KB e si prolunghi finchè venga tagliare in Q la retta PQ; sarà Q il centro di curvatura del lembo del pezzo condotto, e descritto l'arco *nn′* con raggio QT, saranno *mm′, nn′* i due archi cercati, capaci di condursi con moto sensibilmente equabile. Infatti, per le cose dette nel capitolo nono, si scorge che al contatto di questi due archi si può sostituire l'azione di un tirante PQ, legato alle braccia AP, BQ, le quali prolungate s'incontrano in K; e che la perpendicolare KT calata dal punto K sulla direzione del tirante viene a cadere nella intersezione T di questa con la linea dei centri AB.

Se una delle due palmole, per esempio quella che gira intorno al punto B (*fig.* 4) dovesse essere terminata da un filo rettilineo *nn'*, si considererebbe questa retta come un arco di circolo descritto con raggio infinito, e col centro sulla normale TQ; si condurrebbe pel punto B la retta Q'K parallela a TQ, fino ad incontrarsi in K con la *nn'* prolungata; e da questo punto K tirando KA al centro A dell'altra palmola, il punto P in cui essa incontrerebbe la normale QT prolungata sarebbe il centro dell'arco di circolo domandato *mm'*.

Finalmente il lembo di una delle palmole potrebbe anche esser concavo; sia per esempio l'arco *nn'* (*fig.* 5) descritto col raggio QT, il lembo del pezzo condotto che gira intorno al centro B; si tiri TK perpendicolare a QT, e si congiunga QB, la quale incontri la TK in K; dal punto K si tiri KA, e il punto d'incontro P con la linea di azione TQ sarà il centro dell'arco circolare *mm'*, secondo il quale dee tagliarsi il lembo del pezzo conduttore.

Nelle tre *figg.* 3, 4 e 5 ora citate si è supposto, che il punto di contatto T delle due palmole non dovesse mai allontanarsi guari dalle due parti della linea de' centri AB, e che per conseguenza potesse nella sua posizione media supporsi collocato sovra questa linea medesima. Ma la costruzione ora insegnata si applica egualmente al caso di due palmole AM, BM (*fig.* 6), le quali debbano condursi con ragion di velocità sensibilmente costante, nelle vicinanze di una posizione per cui il loro punto di contatto si trovi fuori della linea dei centri. Infatti divisa questa linea in T nella ragione inversa delle velocità angolari dei due pezzi, si tirerà la retta TM, e fatto centro in qualunque punto Q di questa, si segnerà l'arco $nMn'$ che dovrà formare il lembo della palmola BM. Conducendo poi la QB, e prolungandola fino all'incontro in K della ITK perpendicolare a TQ e condotta pel punto T, si compierà la soluzione come negli esempli che precedono tirando la KA e prendendo per centro dell'arco $mm'$ della palmola AM il punto P, in cui la KA taglia la QT prolungata (1).

(1) Questa costruzione si riduce in formola così:
Dai centri A, B (*tav.* 21, *fig.* 6) si abbassino sulla PQ le perpendicolari AR, BS.
Dicansi $AT = a$, $BT = b$, $PT = p$, $QT = q$, ang $ATP = \theta$.
I triangoli simili PAR, PRT daranno

$$PR : PT :: AR : KT,$$

ossia

$$a \cos\theta - p : p :: a \sin\theta : KT.$$

Parimenti dai triangoli simili QBS, QKT si avrà

$$q - b \cos\theta : q :: b \sin\theta : KT,$$

e da queste due proporzioni si dedurrà

$$(p + q)\, ab \,.\, \cos\theta = (a + b)\, pq \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

e

$$q = p \,.\, \frac{ab\cos\theta}{ab\cos\theta - (a + b)\,p} \,.$$

Se l'arco $nn'$ fosse concavo, la seconda delle sovrascritte proporzioni diverrebbe

$$q + b\cos\theta : q :: b\sin\theta : KT,$$

e l'equazione $(a)$ si muterebbe nella

$$(p - q)\, ab\cos\theta = -(a + b)\, pq \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a')$$

la medesima di prima col segno di $q$ mutato.
Se poi $nn'$ fosse linea retta, sarebbe $q = \infty$
e

$$p = \frac{ab\cos\theta}{a + b} \,.$$

Se finalmente si vorrà che le due distanze P, Q sieno eguali tra di loro, saranno

$$p = q = \frac{2ab\cos\theta}{a + b} \,.$$

181. Facciamo l'applicazione di questo metodo alla costruzione approssimativa dei denti delle ruote. Siano CC', DD' (*fig.* 7) le circonferenze primitive di due ruote co' centri in A, B; e sia *o* il punto di mezzo dell' arco di azione della ruota conduttrice ACC', cosicchè sia T*o* eguale, per esempio, alla metà del passo, se l'arco di azione dee essere di un passo intiero. Tirata pel punto di contatto T la retta qualunque PTQ, e preso ad arbitrio sopra di questa un punto P, da questo punto come centro e con raggio P*o* si descriva l'arco circolare *mm'*, che si prenderà per la curva del dente della ruota conduttrice A; la parte *m'o* di quest' arco formerà il fianco del dente, e la parte *om* ne formerà la costa. Si tiri TK perpendicolare a PQ, e si conduca la PA prolungandola fino al suo incontro in K con TK. Finalmente dal punto K si tiri KB; il punto Q, in cui questa incontrerà la linea di azione PQ, sarà il cercato centro della curva condotta. Descritto adunque l'archetto *nn'* tangente in *r* ad *mm'*, la parte *n's* di questo formerà il fianco, e l'altra *sn* la costa del dente della ruota B.

Determinati così i centri P, e Q delle curve dei due denti, per compiere in modo facile la costruzione portisi sulle due circonferenze primitive, partendo dai punti *o*, *s* in cui queste sono incontrate dagli archi *mm'*, *nn'*, la lunghezza del mezzo passo quante volte può capire in ciascuna circonferenza. Poi dal centro A con raggio AP, e dal centro B con raggio BQ si descrivano le circonferenze EPE', FQF', che saranno i luoghi de' centri di tutti i denti; e quindi con una apertura di compasso $=$P*o*, e facendo centro sulla circonferenza EPE' si descriva l'archetto *mm''* volto a ritroso di *mm'* ed a mezzo passo di distanza al di là di *o*. Similmente con una apertura di compasso $=$Q*r*, fatto centro sulla circonferenza FQF', si segni l'archetto *nn''* opposto ad *nn'*, e che tagli la circonferenza primitiva DD' a mezzo passo di distanza dal punto, in cui essa è incontrata dall'arco *nn'*: si saranno così disegnati due denti uno per ciascuna ruota; e ripetendo la costruzione quante volte occorre, si avranno gli intieri perimetri delle due ruote.

Se in questa costruzione il centro P si prendesse nel piede della perpendicolare abbassata da A sulla retta QTP (*fig.* 8), cosicchè la AP fosse parallela alla TK, il punto K si allontanerebbe all'infinito, onde anche la retta BQK sarebbe parallela alla medesima TK e perpendicolare a PQ. La costruzione adunque coinciderebbe con quella del § 154 e rappresentata nella *tav.* 16, *fig.* 5; i circoli EPE', FQF' sarebbero quelli, che allora chiamavamo circoli di base; ma agli archi di evolvente, che formavano il profilo dei denti, si troverebbero ora sostituiti archi di circoli, e la equabilità del movimento, che con la costruzione del § 154 si ottiene assoluta, non sarebbe se non approssimativa con quella testè insegnata.

In entrambe le costruzioni la direzione della retta PTQ è arbitraria; ma l'esperienza ha fatto conoscere, che il valore più conveniente dell'angolo ATP è di circa 75°; ed allora le distanze PT, QT dei piedi delle perpendicolari AP, BQ dal punto T riesciranno prossimamente eguali alla quarta parte dei raggi primitivi AT, BT rispettivamente (1).

(1) Se l'arco di azione si dovrà stendere egualmente dalle due parti del punto di contatto T delle due circonferenze primitive, il punto $o$ coinciderà col punto T, ed allora i raggi dei due archi $mm'$, $nn'$ saranno le distanze medesime PT, QT; tra questi due raggi, in virtù della nota precedente sussisterà dunque la relazione

$$(p+q)\,ab\cos\theta=(a+b)\,pq\;.$$

Se dunque i due raggi dovessero essere eguali tra loro, sarebbero

$$p=q=\frac{2ab\cos\theta}{a+b}\;.$$

Se il fianco della ruota condotta si vuol che sia rettilineo

$$p=\frac{ab\cos\theta}{a+b}\;.$$

Se si vuole che i due raggi sieno proporzionali a quelli delle due ruote

$$p=a\cos\theta\;,\qquad q=b\cos\theta\;.$$

182. Formando il fianco e la costa del dente con un solo arco di circolo, l'equabilità del movimento della ruota condotta non sussisterà che un istante solo; si avrà una soluzione più approssimata e pienamente rispondente a tutti i bisogni della pratica formando il profilo di ciascun mezzo dente con due archi di raggi differenti l'uno pel fianco, l'altra per la costa. Si possono così imitare in modo spedito e abbastanza esatto le ruote a coste epicicloidali ed a fianchi rettilinei diretti secondo i raggi delle ruote.

Siano CC', DD' (*fig.* 9) le due circonferenze primitive date; alla distanza di una metà del passo dalla linea dei centri AB tirisi nella ruota condotta BDD' il raggio B$n'n$ che dee formare un fianco; questo potrà riguardarsi come un arco di circolo descritto con raggio infinitamente grande, e col centro sulla retta TQ perpendicolare a B$n$. Pel centro B si tiri BQ' parallela a TQ, e pel punto T, KTI perpendicolare a questa; dall'incontro K di queste due rette si conduca KA; il punto P, in cui questa taglierà la TQ, sarà il centro da cui dee descriversi l'arco $mm'$ tangente al fianco $nn'$. In modo affatto analogo si troverà il centro $q$, da cui dee descriversi l'arco $\mu\mu'$ della costa del dente della ruota condotta, che dee essere tangente al fianco $\nu\nu'$ segnato nella ruota conduttrice alla distanza di un mezzo passo dalla linea dei centri. La *fig.* 9 e le cose dette nel § precedente bastano a mostrare come vada terminata l'operazione (1).

(1) Detto $\psi$ l'arco di recesso della ruota condotta, sarà $b \sin\psi$ la lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto T sul fianco $nn'$ di questa ruota, e per conseguenza il raggio $\rho$ della costa della ruota conduttrice sarà

$$PT + b \sin\psi = \frac{ab\cos\theta}{a+b} + b\sin\psi\ ;$$

e similmente, se si suppone che la ruota conduttrice divenga ruota condotta, o sii $\psi'$ l'arco di recesso di essa, si avrà pel raggio $\rho'$ della costa dell'altra ruota

$$\rho' = \frac{ab\cos\theta}{a+b} + a\sin\psi'\ .$$

Questa costruzione, come quella delle ruote a denti epicicloidali, ha il difetto che già abbiamo notato altrove, cioè, che la curva dei denti di ciascheduna ruota dipendendo non solamente dal raggio della ruota medesima, ma ancora da quello della ruota compagna ch'essa dee condurre o dalla quale dee essere condotta, una ruota così descritta non può far giusto incastro con due ruote di raggi differenti. Hanno poi anche entrambe queste costruzioni l'altro vizio di somministrar denti molto strozzati nella radice, e per conseguenza assai deboli in questa parte, che pur è quella in cui essi son più soggetti a rompersi. Si ovvia ad un tempo ad entrambi questi sconci sostituendo ai fianchi rettilinei dei denti, fianchi concavi il cui raggio si determinerà nel modo che ora stiamo per ispiegare.

183. Pel punto di contatto T delle circonferenze primitive CC′, DD′ (*fig.* 10) si conducano la retta QT*q* che faccia con la linea de'centri AB un angolo di 75° circa, e la retta KT*k* perpendicolare alla prima. Su queste ultime rette si prendano le lunghezze TK, T*k* eguali tra di loro e minori sì dell'uno, che dell'altro raggio primitivo. Uniscasi il centro A col punto K, e notisi il punto P in cui la retta AK taglia la QT*q*; uniscasi parimenti B con K, e notisi il punto di intersezione Q con la medesima QT*q*; saranno P e Q i centri da cui dovranno essere descritti gli archi che formeranno il fianco della ruota B, e la costa della ruota A, i quali archi si descriveranno così. Sulle circonferenze primitive CC′, DD′ partendo dal punto T, e dalla parte opposta a quella da cui cadono i centri P, Q si prendano gli archi T*m*, T*n* eguali al mezzo passo; quindi, centro in P, raggio P*m*, si descriva l'arco *mm′* fuori della circonferenza CC′; sarà questa la costa del dente della ruota A. Centro in Q, raggio Q*n*, si descriva l'arco *nn′ entro* la circonferenza primitiva DD′, e sarà questo il fianco della ruota B.

Proseguasi poi unendo A con $k$, e notando l'incontro $q$ del prolungamento di A$k$ con la QT$q$; unendo similmente B con $k$, e notando l'incontro $p$ della B$k$ con QT$q$; saranno $p$, $q$ i centri degli archi della costa di B e del fianco di A, i quali si descriveranno segnando sulle circonferenze primitive i punti $s$, $r$ a mezzo passo di distanza da T dalla parte opposta di $p$ e $q$, e prendendo per raggi le distanze $ps$, $qr$.

Per agevolar poi la descrizione dei profili di tutti i denti di ciascuna ruota, si descriveranno dal centro A le circonferenze $cd$ con raggio AP, ed $ef$ con raggio A$q$: e saranno queste i *luoghi* di tutti i centri delle coste e dei fianchi della ruota A. E parimenti si descriveranno dal centro B le circonferenze $hg$, $il$ coi raggi B$p$, BQ; e queste saranno i *luoghi* di tutti i centri delle coste e dei fianchi della ruota B.

Che i denti così conformati sieno più robusti di quelli a fianchi rettilinei si fa manifesto al solo considerare le due *figg.* 9 e 10 della *tav.* 21. Che poi le ruote che stiam descrivendo godano del vantaggio di potersi accoppiare ad altre ruote di diametro qualunque facilmente si comprenderà doversi verificare, purchè in tutte le ruote da accoppiarsi la lunghezza TK sia la medesima, e sia pure il medesimo l'angolo QTA. Poichè basta por mente alla costruzione testè insegnata per riconoscere, che la forma dei denti di ciascheduna ruota dipende unicamente dalla grandezza del raggio di essa, dalla lunghezza TK e dall'angolo ora detto; e non punto dal raggio dell'altra ruota.

Tale è la costruzione approssimativa del profilo dei denti delle ruote per via di archi di circoli proposta dal sig. R. Willis, e resa da lui più agevole ancora, e tale da poter essere comodamente introdotta nella pratica, mercè di uno strumento, al quale egli ha imposto il nome di *odontografo* ossia di *segna-denti;* questo strumento, che ognuno può facilmente costruire con un foglio di carta forte, o con una lamina sottile di metallo, altro non è insomma che una specie di squadra obliqua graduata, sulla quale sono inscritte certe tavole, che danno tosto i raggi sì della costa, sì del fianco di qualsiasi ruota, di cui si conoscano il raggio ed il numero dei denti. Nella nota appiè di questa pagina si dimostra, che con la costruzione approssimativa ora spiegata, agli archi di epicicloide e di ipocicloide, i quali secondo la *soluzione quarta* del § 145 dovrebbero formare la costa ed il fianco dei denti, vengono a sostituirsi due archi circolari di raggi rispettivamente eguali ai raggi di curvatura di quelle epicicloidi, nel punto in cui esse si toccano quando i denti, di cui formano il contorno, sono alla distanza della metà dell'arco di accesso o dell'arco di recesso dalla linea dei centri (1).

(1) Consideriamo la epicicloide che ha per deferente la circonferenza CC', e per epiciclo un circolo di raggio $c$ (*tav.* 21, *fig.* 10); supponendo per un istante che $mm'$ sia un arco di questa epicicloide, il punto $s$ cadrà sulla circonferenza dell' epiciclo supposto tangente in T con la circonferenza CC'. Detto $\varphi$ l'angolo compreso tra la linea de'centri BT, ed il raggio condotto nell'epiciclo al punto $s$, il raggio di curvatura della epicicloide in $s$, secondo le formole della nota al § 137 (pag. 244), avrà per espressione

$$\rho = \frac{4c(a+c)\cos\frac{1}{2}\varphi}{a+2c}.$$

Ora nelle formole della nota al § 180 essendosi chiamato $\theta$ l'angolo $APT = \frac{1}{2}\varphi$, avremo pure

$$\rho = \frac{4c(a+c)\cos\theta}{a+2c};$$

e per conseguenza

$$\rho - Ts = \rho - 2c\cos\theta = \frac{2ac\cos\theta}{a+2c}.$$

Ma in quella nota medesima abbiam pur trovato, chiamando $k$ la lunghezza arbitraria T$k$, e $p$ la distanza PT, I lettori, che vorranno entrar più innanzi nello studio di questo metodo potranno ricorrere sia alla memoria originale inserta dall'inventore nelle Transazioni della Società degli Ingegneri civili di Londra (tom. 2, pag. 89), sia al Trattato di Cinematica del medesimo autore.

$$a \cos \theta - p : p :: a \sin \theta : k ;$$

ossia $$p = \frac{a\, k \cos \theta}{a \sin \theta + k} .$$

Se dunque porremo $k = 2\, c \sin \theta$, verrà

$$p = \frac{2\, a\, c \cos \theta}{a + 2\, c} = \rho - \mathrm{T}s ;$$

ossia $$p + \mathrm{T}s = \mathrm{P}s = \rho ;$$

dalla quale eguaglianza risulta, che l'arco di circolo $msm'$ descritto dal punto P come centro, ha effettivamente per raggio il raggio di curvatura nel punto $s$ della epicicloide generata da un circolo di raggio $c = \dfrac{k}{2 \sin \theta}$.

Nello stesso modo si dimostrerebbe che la distanza Q$s$ è pure eguale al raggio di curvatura della ipocicloide generata entro alla circonferenza DD$'$ del medesimo epiciclo di raggio $c = \dfrac{k}{2 \sin \theta}$. E siccome le ruote a fianchi rettilinei, e quelle ad evolvente di circolo non sono altro che casi particolari della quarta soluzione, la dimostrazione ora data si applica egualmente alle costruzioni approssimative rappresentate nelle *figg.* 8 e 9, ed esposte nei precedenti §§.

## CAPITOLO VENTESIMOTTAVO

### DELL'USO DEI TIRANTI PER LA COMMUNICAZIONE DEL MOVIMENTO CON RAGION VARIABILE DI VELOCITÀ.

184. Quando la communicazione del movimento si fa per mezzo di due braccia diseguali, unite da un tirante di lunghezza maggiore o minore della distanza dei due centri intorno ai quali le due braccia si rivolgono, la ragione delle velocità angolari di queste va continuamente variando, in guisa che per ciascuna posizione del meccanismo, le due velocità sono inversamente proporzionali ai segmenti in cui la linea de' centri vien divisa dalla direzione del tirante. Da questa legge il cui enunciato è così semplice, e che abbiam presa per fondamento della teorica di tutti i meccanismi che siamo venuti successivamente esaminando, nasce tanta varietà e singolarità di effetti, che stimiamo degnissimo di attenzione, come non è esente da difficoltà, lo studio che imprendiamo nel presente capitolo delle proprietà di un meccanismo, di cui tutti gli altri possono riguardarsi come altrettante modificazioni, e del quale non dubitiamo di affermare che sarà tanto più adoperato nella forma sua più semplice, quanto sarà meglio conosciuto.

Per agevolare questo studio ed evitare ogni confusione, in tutte le figure che ci occorrerà di fare, noi designeremo sempre i medesimi oggetti con le medesime lettere; A, B saranno sempre i centri intorno ai quali girano il braccio movente AP, ed il braccio condotto BQ; quindi saranno sempre AB la linea dei centri, PQ la lunghezza del tirante: noteremo poi con le lettere C, D i punti, ne' quali la circonferenza descritta dall'estremità del braccio AP taglia la linea dei centri AB; e con le lettere E, F quelli, in cui questa medesima retta è tagliata dalla circonferenza descritta dall'estremità del braccio BQ.

185. La proposizione testè ricordata ci fa subito conoscere, per dir così, a colpo d'occhio la velocità angolare del braccio cedente BQ in certe particolari posizioni del meccanismo, che ora passiamo a specificare. Ed in primo luogo è manifesto, che ogni volta che la testa P del braccio movente passerà per uno dei punti C, D, cioè cadrà sulla linea dei centri, sicchè il tirante prenda la posizione CQ', oppure la posizione DQ'' (*tav.* 22, *fig.* 4), la velocità angolare del cedente starà a quella del movente, nel primo caso come AC sta al BC, e nel secondo caso come AD sta al BD; ossia, come la lunghezza del braccio movente, sta, nel primo caso alla somma, e nel secondo caso alla differenza tra questo braccio e la distanza AB dei due centri.

E nello stesso modo si scorge, che quando l'estremità Q del braccio condotto passerà per uno dei punti E, F, cioè cadrà sulla linea dei centri, la sua velocità angolare starà a quella dell'altro braccio, come la differenza, oppure la somma della distanza dei centri e del braccio condotto sta alla lunghezza di questo braccio (1).

(1) Siano $AP = a$, $BQ = b$, $AB = c$, $PQ = l$; dicansi $\varphi$ e $\psi$ gli angoli PAB, QBA che in una posizione qualunque del meccanismo fanno i due bracci AP, BQ con la linea dei centri AB; ed $\alpha$, $\omega$ le velocità angolari delle due braccia. Le proposizioni enunciate nel testo potranno esprimersi algebricamente dicendo, che

$$\text{per} \quad \varphi = o \text{ sarà } \cos\psi = \frac{b^2 + (a-c)^2 - l^2}{2b(a-c)}, \text{ ed } \frac{\omega}{\alpha} = \frac{a}{a-c};$$

$$\text{per} \quad \varphi = 180^\circ, \ \cos\psi = \frac{b^2 + (a+c)^2 - l^2}{2b(a+c)}, \text{ ed } \frac{\omega}{\alpha} = \frac{a}{a+c};$$

$$\text{e che per } \psi = 0 \text{ sarà } \cos\varphi = \frac{a^2 + (b-c)^2 - l^2}{2a(b+c)}, \text{ ed } \frac{\omega}{\alpha} = \frac{b-c}{b};$$

$$\text{per} \quad \psi = 180^\circ, \ \cos\varphi = \frac{d^2 + (b+c)^2 - l^2}{2a(b+c)}, \text{ ed } \frac{\omega}{\alpha} = \frac{b+c}{b}.$$

Ancora è chiaro che le velocità angolari dei due bracci saranno eguali tra di loro, quando il tirante si disporrà in direzion parallela alla linea dei centri; poichè allora il suo punto d'incontro con questa linea essendo infinitamente lontano da A e da B, i due segmenti della linea de' centri saranno eguali tra di loro. Quando le circonferenze descritte dai due bracci non si tagliano (*fig.* 5), le due braccia ed il tirante potranno disporsi come si vede in APQB, oppure com'è espresso in AP'Q'B, secondo che sarà più o meno grande la lunghezza del tirante; conducendo le rette BR, BR' parallele ad AP, AP' fino all'incontro del prolungamento del tirante, ne risulteranno i triangoli BRQ, BR'Q', ne' quali conoscendosi tutti e tre i lati (poichè BR = BR' = AP, QR = AB — PQ, Q'R' = AB + P'Q'), resteranno determinati gli angoli de' triangoli medesimi, e quindi anche quelli che i bracci fanno con la linea dei centri (1).

Quando le circonferenze descritte dalle due braccia si tagliano, come si vede nella *fig.* 6, il parallelismo del tirante con la linea dei centri può pure aver luogo in due modi, disponendosi i due bracci ed il tirante, com'è disegnato in AP'Q'B, oppure com'è espresso in APQB. Nella prima disposizione il triangolo BR'Q' formato col condurre BR' parallela ad AP' ha pe' suoi tre lati le lunghezze delle due braccia, e la differenza Q'R' tra la lunghezza del tirante P'Q' e la distanza dei centri AB; nell'altra disposizione APQB le braccia AP, BQ s'incrociano, ed il triangolo BQR, che fa cono-

(1) In queste due posizioni saranno dunque

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + (c-l)^2 - b^2}{2a(c-l)}, \quad \cos\psi = \frac{b^2 + (c-l)^2 - a^2}{2b(c-l)},$$

oppure

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + (c+l)^2 - b^2}{2a(c+l)}, \quad \cos\psi = \frac{b^2 + (c+l)^2 - a^2}{2b(c+l)},$$

come appare dalla risoluzione dei triangoli BRQ, BR'Q'.

scere gli angoli dei due bracci con la linea dei centri, ha i suoi tre lati rispettivamente eguali ai due bracci, ed alla somma della linea dei centri AB e della lunghezza PQ del tirante (1).

In tutte queste posizioni, nelle quali il tirante è parallelo alla linea dei centri, le due braccia girano con la medesima velocità angolare e pel medesimo verso; ma quando il tirante incontra la linea dei centri tra i due centri medesimi, come nella *fig.* 2 della *tav.* 23, e precisamente nel mezzo di AB, le due velocità angolari sono bensì eguali tra di loro, ma rivolte per versi contrarii, appunto come avviene quando tra due puleggie si trasmette il movimento per via di un cingolo che segue l'andamento delle tangenti interne, incrociandosi tra le due puleggie. In questo caso non è più possibile determinare con semplici costruzioni geometriche la posizione delle due braccia e del tirante, e la soluzione dipende da calcoli numerici, che non si possono eseguire se non per approssimazione (2).

(1) I due triangoli BQ'R', BQR danno:
per la disposizione AP'Q'R

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + (c-l)^2 - b^2}{2a(c-l)}, \quad \cos\psi = \frac{b^2 + (c-l)^2 - a^2}{2b(c-l)};$$

e per la disposizione APQB

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + (c+l)^2 - b^2}{2a(c+l)}, \quad \cos\psi = \frac{b^2 + (c+l)^2 - a^2}{2b(c+l)}.$$

Appunto come quando le circonferenze non si tagliano.

(2) Questa soluzione infatti, come in generale quelle degli altri problemi relativi al meccanismo che esaminiamo, è data da una equazione del terzo grado.

Ritenute tutte le denominazioni delle note precedenti, dicasi $z$ (*tav.* 23, *fig.* 1), in una posizione qualunque del sistema, il prolungamento PT del tirante fino all'incontro della linea dei centri in T; essendo i

186. Finquì noi abbiam ricercate quali siano le posizioni delle due braccia, per le quali si pareggiano le loro velocità angolari; ma più importanti assai a considerarsi sono quelle, nelle quali la direzion del tirante passando per l'uno o per l'altro dei due centri, svanisce uno dei due segmenti in cui esso divide la distanza di questi due punti, e per conseguenza, o divien nulla la velocità del braccio condotto se il tirante passa pel centro del moto del braccio conduttore, o questa velocità diviene infinita se esso passa pel centro del moto del braccio condotto. La considerazione di queste particolari posizioni del meccanismo può sola condurre a formarsi un giusto concetto degli accidenti del suo movimento, e ci somministrerà il miglior criterio per istabilire una classificazione delle varietà che si ottengono modificando le lunghezze delle braccia, quella del tirante, e la distanza dei centri.

Quando il braccio o manubrio conduttore, girando intorno

segmenti TA, TB inversamente proporzionali alle velocità angolari $\alpha$, $\omega$ dei due bracci, dovrà essere

$$AT = \frac{\omega c}{\alpha - \omega}, \quad BT = \frac{\alpha c}{\alpha - \omega};$$

e quindi i due triangoli TAP, TBQ daranno pel coseno dell'angolo in T le due espressioni

$$\cos T = \frac{c^2\omega^2 + (z^2 - a^2)(\alpha - \omega)^2}{2c\omega(\alpha - \omega)z}, \quad \cos T = \frac{c^2\alpha^2 + \{(z+l)^2 - b^2\}(\alpha - \omega)^2}{2c\alpha(\alpha - \omega)(z+l)}.$$

Onde l'equazione

$$\left(1 - \frac{\omega}{\alpha}\right)^3 z^3 + l\left(1 - \frac{2\omega}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\omega}{\alpha}\right)^2 z^2$$
$$- \left\{\left(1 - \frac{\omega}{\alpha}\right)\left(a^2 + \frac{(l^2 - b^2)\omega}{\alpha}\right) + c^2\frac{\omega}{\alpha}\right\}\left(1 - \frac{\omega}{\alpha}\right)z$$
$$+ l\left\{c^2\frac{\omega^2}{\alpha^2} - a^2\left(1 - \frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right\} = 0.$$

al centro A pel verso D$m$C (*tav.* 22, *fig.* 1), sarà giunto nella posizione A$m$, tale che il tirante M$m$ si trovi disteso in linea retta sul prolungamento del braccio condotto BM, è chiaro ch'esso non potrà proseguire il suo movimento al di là di $m$ (resistendo a ciò la inestensibilità del braccio BM e del tirante M$m$); che se, dopo di esser giunto in $m$, il braccio A$m$ prendesse un moto retrogrado, ritornando da $m$ verso D ed avvicinandosi per conseguenza al centro B, l'articolazione in M dovrebbe piegarsi, e potrebbe egualmente cedere andando verso R oppure verso E, cosicchè ad uno stesso movimento di A$m$ potrebbero corrispondere due movimenti contrari di BM; quando ciò avviene la macchina dicesi giunta in un *punto morto*. Noi distingueremo punti morti di due specie, secondochè il tirante si troverà disteso sul prolungamento del braccio condotto, come nel caso ora supposto, oppure cadrà sulla direzione medesima di questo braccio come si vede in A$n$NB (*fig.* 3). Egli è chiaro

Ponendo in questa equazione $\alpha = \omega$, si trova $z = \infty$, e si ricade sulle soluzioni che abbiam sopra riferite, e nelle quali il tirante è parallelo alla linea dei centri. Se poi si pone $\omega = -\alpha$, si ha per determinare il corrispondente valore di $z$

$$z^3 - \frac{3}{2} l z^2 - \frac{2a^2 + 2b^2 - 2l^2 - c^2}{4} z + \frac{l}{8}(c^2 - 4a^2) = 0 .$$

Generalmente poi per qualunque valore di $\frac{\omega}{\alpha} = m$, ponendo $(1-m)z = x$, l'equazione sovrascritta diverrà

$$x^3 + l(1-2m)x^2 - (1-m)\{a^2 + m(l^2 - b^2)\}x + l\{m^2c^2 - (1-m)^2a^2\} = 0;$$

trovato che siasi $x$ per mezzo di questa equazione, si avrà $z = \frac{x}{1-m}$, e quindi i triangoli TAP, TBQ daranno

$$\cos \varphi = -\frac{(1-m)^2(a^2 - z^2) + m^2c^2}{2m(1-m)ac} ;$$

$$\cos \psi = \frac{(1-m)^2\{b^2 - (l+z)^2\} + c^2}{2(1-m)bc} .$$

qui pure che il braccio conduttore venuto da $s$ in $n$ non può proseguire il suo movimento verso D (resistendo a ciò la incompressibilità del braccio condotto e del tirante); ma che se il braccio conduttore si fa retrocedere verso $s$, allontanando il punto $n$ dal centro B, il tirante ed il braccio BN sono costretti a sdoppiarsi e il giunto N si apre, potendo ciò egualmente avvenire in due modi, cioè camminando N verso F oppure verso S.

Vi ha dunque due specie di *punti morti;* sono della *prima specie* quelli in cui il tirante è sul prolungamento del braccio condotto, ed in essi la distanza $m$B (*fig.* 1) della testa del braccio conduttore dal centro del braccio condotto è eguale alla somma delle lunghezze del tirante $m$M e del braccio condotto MB. Sono *punti morti di seconda specie* quelli in cui il tirante coincide con la direzione del braccio condotto, ed in questi la distanza $n$B (*fig.* 3) della testa del braccio conduttore dal centro del braccio condotto è eguale alla differenza tra le lunghezze del tirante $n$N, e del braccio condotto NB.

Può ancora avvenire che il tirante venga a trovarsi in linea retta, non già col braccio condotto, ma bensì col braccio conduttore, e ciò pure in due modi, cioè, o cadendo il tirante sul prolungamento del braccio conduttore, come si vede in A$r$RB (*fig.* 1), o coincidendo la direzione del tirante con quella del braccio medesimo, come si scorge in A$s$SB (*fig.* 3). Noi chiameremo queste posizioni *punti di regresso di prima e di seconda specie*, perchè quando la macchina giunge in una di esse, il braccio conduttore può ben continuare liberamente il suo movimento, ma il braccio condotto non può andare al di là, e necessariamente prende moto *retrogrado* o di *regresso.* Ne' punti di regresso della prima specie la distanza AR (*fig.* 1) della testa del braccio condotto dal centro del braccio conduttore è eguale alla somma delle lunghezze del tirante R$r$ e del braccio conduttore A$r$; nei punti di regresso della seconda specie (*fig.* 3), quella distanza è eguale alla differenza tra le lunghezze del tirante $sS$, e del braccio conduttore $As$. Tanto i *punti morti*, quanto i *punti di regresso* verranno da noi compresi sotto la denominazione generale di *punti singolari* (1).

Da ciò derivano le regole seguenti:

*Per trovare i punti morti, fatto centro nel centro del braccio condotto, si descrivano due archi, l'uno con raggio eguale alla somma, l'altro con raggio eguale alla differenza del tirante e del braccio condotto. Ciascheduno di questi archi taglierà in due punti la circonferenza descritta dal braccio conduttore, o la toccherà in un punto solo, o non l'incontrerà affatto; i punti d'intersezione od il punto di contatto, quando esistono, indicheranno le posizioni della estremità del braccio conduttore ne'* punti morti di prima specie; *e le intersezioni od il contatto del secondo arco faranno conoscere le posizioni dell'estremità del braccio conduttore ne'* punti morti di seconda specie.

E similmente:

*Per trovare i punti di regresso, fatto centro nel centro del braccio conduttore, si descrivano due archi, l'uno con raggio eguale alla somma, l'altro con raggio eguale alla differenza del*

(1) Io ritengo qui la denominazione di *punti morti* nel significato usato dai pratici, e vi aggiungo quella di *punti di regresso*, che mi par comoda per abbreviare i discorsi, quale mi sembra pure che sia quella di *punti singolari*, e la distinzione loro in due specie. Meglio tuttavia sarebbe, per avventura, abbandonare il nome di *punti morti* come poco proprio, applicandosi non a punti, ma a posizioni di tutta la macchina. Io proporrei di chiamare *posizioni di regresso del movente* e *posizioni di regresso del cedente*, quelle in cui questi pezzi sono costretti dalla scambievole loro connessione ad indietreggiare: e *posizioni ambigue del movente o del cedente* quelle in cui uno o l'altro pezzo può prendere indifferentemente un moto diretto od un moto retrogrado, per uno stesso moto del pezzo compagno. Con queste denominazioni, ad ogni posizione di regresso o ad ogni posizione ambigua del conduttore corrisponderebbe una posizione ambigua od una posizione di regresso del pezzo condotto, e viceversa; i punti singolari poi non cangerebber nome, quando il movente si cangiasse in cedente, e viceversa.

*tirante e del braccio conduttore. Ciascheduno di questi archi taglierà in due punti la circonferenza descritta dal braccio condotto, o la toccherà in un punto solo, o non la incontrerà affatto; i punti di intersezione od il punto di contatto del primo arco, quando esistono, indicheranno le posizioni dell'estremità del braccio condotto ne'* punti di regresso di prima specie; *e le intersezioni od il contatto del secondo arco faranno conoscere le posizioni dell'estremità del braccio condotto ne'* punti di regresso di seconda specie.

187. Dalle cose dette finora risultano manifestamente queste conchiusioni, cioè:

1° Quando il braccio conduttore diviene braccio condotto, i punti morti si cangiano in punti di regresso e viceversa.

2° I punti singolari esistono generalmente per coppie, cioè se vi ha un punto morto di prima specie, ve ne ha pure un secondo collocato simmetricamente dall'altra parte della linea dei centri: tali sono A$m$MB, A$m'$M'B, e lo stesso si dica in tutti gli altri casi. Due punti morti, o due punti di regresso possono però confondersi in un punto solo, il quale cadrà allora sulla linea dei centri. Così avviene, come abbiam veduto, quando le braccia sono eguali, ed il tirante è eguale alla distanza dei centri (§ 176).

3° Non tutte e quattro le specie di punti singolari hanno luogo sempre necessariamente in ogni sistema di due braccia e di un tirante; anzi alcuna sempre ne manca, come tosto vedremo. L'esistenza di questa o di quella specie di punti singolari dipende dalle relazioni che passano in ciascun caso fra le lunghezze delle quattro linee seguenti, cioè fra la distanza dei due centri, la lunghezza del tirante e quelle delle due braccia; onde occorrono sei casi distinti, cioè:

1° Quando la somma dei raggi o bracci è minore della distanza dei due centri, come nelle figure finora citate. Allora le circonferenze descritte dalle estremità dei due bracci non si tagliano.

2° Quando ciaschedun braccio è minore della distanza dei due centri, ma la somma dei due bracci è maggiore di questa distanza. Allora le due circonferenze si tagliano in due punti (*fig.* 7, *tav.* 22); ma ciascun centro è collocato fuori della circonferenza descritta dall'altro braccio.

3° e 4° Quando uno dei due bracci BQ è maggiore, e l'altro AP minore della distanza dei centri. Allora le due circonferenze possono tagliarsi o non tagliarsi (*figg.* 8 e 9). Uno dei centri B è fuori, l'altro A è dentro della circonferenza descritta dalla estremità dell'altro braccio.

5° e 6° Finalmente quando entrambe le braccia sono maggiori della distanza dei centri (*figg.* 10 e 11): allora l'uno e l'altro centro sono contenuti ciascuno nella circonferenza descritta dall'altro braccio; le circonferenze poi possono tagliarsi o non tagliarsi.

Ognuno di questi sei casi dà luogo ancora a tre od a quattro varietà, secondochè si fa più o men lungo il tirante; cosicchè in somma si trovano venti e una varietà, che ancor potrebbero moltiplicarsi considerando separatamente le due ipotesi che il braccio movente sia maggiore, oppure minore del cedente. Per ognuna di queste varietà occorre di determinarvi il numero, la qualità e la specie de' punti singolari e la loro posizione; e di esprimere numericamente od almeno graficamente la legge del movimento del cedente. Lunga e molesta fatica, che non imprenderemo con animo di condurla a fine; ma sì solamente di darne alcuni esempli, che valgan di norma per tutti i casi.

188. Tornando sulle *fig.* 1, 2 e 3, che si riferiscono al primo caso, cioè a quello in cui si suppone la somma dei due bracci minore della linea de' centri, si fa tosto manifesto che il tirante non può mai essere nè minore della minima distanza DE delle circonferenze descritte dalle estremità delle due braccia, nè maggiore della distanza massima CF delle circonferenze medesime; ma tra questi due limiti il tirante

può avere una infinità di lunghezze differenti che danno pur luogo a differenti combinazioni di punti singolari, epperò ancora a differenti vicende nella trasmissione del movimento; noi farem dunque successivamente le tre supposizioni che seguono:

1ª *Supposizione.* Il tirante è maggiore di DE e minore di CE, cioè maggiore della distanza dei centri meno la somma dei due raggi, e minore della distanza dei centri meno la differenza dei due raggi.

2ª *Supposizione.* Il tirante è maggiore di CE e minore di DF, cioè maggiore di AB meno la differenza de'due raggi, e minore di AB più la stessa differenza.

3ª *Supposizione.* Il tirante è maggiore di DF e minore di CF, cioè maggiore di AB più la differenza dei due raggi, e minore di AB più la somma dei raggi medesimi.

189. *Supposizione prima* (*tav.* 22, *fig.* 1).

Tirante maggiore di DE
— minore di CE.

Centro in B: raggio eguale al tirante più BE, si descriva l'arco $mm'$, il quale incontrerà la circonferenza $CmDm'$ nei due punti $m$, $m'$; saranno $Am$, $Am'$ due posizioni del braccio conduttore corrispondenti a due punti morti di prima specie; e conducendo le rette $mB$, $m'B$, le quali incontrino in M, M' la circonferenza FMEM', saranno BM, BM' le posizioni corrispondenti del braccio condotto.

Centro sempre in B: raggio eguale al tirante meno BE, si descriva l'arco $nn'$; questo non incontrerà la circonferenza $CmDm'$, e mostrerà così che non vi ha nissun punto morto di seconda specie.

Centro in A: raggio eguale al tirante più AD, si descriva l'arco RR'; i punti R, R' in cui esso incontrerà la circonferenza FRER', indicheranno due posizioni BR, BR' del braccio condotto, corrispondenti a due punti di regresso di prima specie; e dai punti R, R′ conducendo le rette RA, R′A che incontrino la circonferenza C*m*D*m*′ in *r*, *r*′ saranno A*r*, A*r*′ le corrispondenti posizioni del braccio conduttore.

Finalmente, centro in A: raggio eguale al tirante meno AD, si descriva l'arco SS′; esso non incontrerà la circonferenza del braccio condotto, e si comprenderà da ciò che non vi ha nessun punto di regresso di seconda specie.

Quindi conchiudendo: in questa prima supposizione, vi avrà quattro punti singolari, cioè due punti morti, e due punti di regresso, tutti e quattro di prima specie. Il braccio conduttore potrà muoversi per tutto l'arco *mr*D*r*′*m*′, ma non potrà mai passare al di là dei punti *m*, *m*′ sull'arco *m*C*m*′. Il braccio condotto potrà oscillare sull'arcó RMEM′R′, ma non potrà mai oltrepassare i punti R, R′ venendo sull'arco RFR′. Di più, per la natura de' punti morti, tutte le volte che la macchina passerà per una delle posizioni A*m*MB, A*m*′M′B, il braccio condotto potrà proseguire il suo movimento diretto, oppure prendere un moto retrogrado.

Le curve *m*R′M′, V*r*′V′ della *fig.* 1. *bis* mostrano con quali leggi vada muovendosi il cedente, mentre il movente percorre equabilmente l'arco *m*D*m*′. La linea retta MHKD*r*′*m*′ rappresenta appunto la lunghezza di questo arco *m*D*m*′, che si suppone divisa in sedici parti eguali; la *ordinata* HI, condotta alla curva *m*R′M′, da qualunque punto H della *mm*′, rappresenta lo spazio descritto dal cedente, quando il movente ha descritto sull'arco *m*D*m*′ (*fig.* 1) uno spazio *m*H corrispondente all'ascissa segnata con le medesime lettere nella *fig.* 1. *bis*; e similmente l'ordinata HL della curva punteggiata V*r*′V′ rappresenta la velocità angolare del cedente nel medesimo istante.

Partendo il movente da *m* e girando esso pel verso della saetta, il cedente potrebbe incamminarsi da M verso E, oppure verso R; la curva *m*R′M′ degli spazii si è costrutta nella ipotesi ch'esso vada verso E fino in R′, poi con moto retrogrado da R′ fino in M′; questa curva ci fa vedere, che il moto diretto sarà dapprincipio ritardato, poi debolmente accelerato, poi ritardato di nuovo; ma che il moto retrogrado sarà sempre accelerato. Lo stesso, ed assai meglio si vede osservando la curva punteggiata V*r*′V′ delle velocità, poichè questa ci mostra che nel primo istante del moto la velocità è infinitamente grande, ma tosto e rapidissimamente decresce, ed arriva ad un valor minimo HL quando il movente ha descritta la ottava parte circa della sua corsa; cresce quindi la velocità, ma assai lentamente da HL in KG, finchè il movente sia giunto poco presso al terzo della sua corsa; in questo istante la velocità del cedente ricomincia a decrescere, ma molto lentamente dapprincipio, poi sempre più rapidamente, e diviene assolutamente nulla quando il movente arriva in *r*′; a questo punto il moto del cedente si fa retrogrado, e la curva della velocità passando al dissotto dell'asse *mm*′ se ne discosta sempre più, finchè la sua ordinata diviene infinita, e mostra che quando il movente arriva in *m*′, il cedente arriverà in M′ con velocità infinitamente grande.

Abbiam supposto che il moto del braccio condotto fosse da principio diretto da M verso E; s'esso al contrario prendesse a muoversi secondo MR, non sarebbe difficile lo scorgere la disposizione che dovrebbe darsi alle due curve *m*R′M′, V*r*′V.

190. *Supposizione seconda* (*tav.* 22, *fig.* 2).

Tirante maggiore di CE
— minore di DF.

Ripetendo qui le operazioni indicate nella supposizione precedente si troverà che niuno de' due archi *mm*′, *nn*′, descritti dal centro B con raggi eguali al tirante più, o meno BE, non incontra la circonferenza descritta dal braccio conduttore; onde si dedurrà che non vi sono punti morti nè di prima, nè di seconda specie.

Si troverà ancora che gli archi RR′, SS′, descritti dal centro A, con raggi eguali al tirante più AD, ed al tirante meno AD, incontrano entrambi la circonferenza descritta dal braccio condotto, il primo ne' punti R, R′, il secondo nei punti S, S′, e se ne conchiuderà che vi sono qui due punti di regresso della prima specie $ArRB$, $Ar'R'B$, e due punti di regresso della seconda specie $AsSB$, $As'S'B$.

Non essendovi punti morti, il braccio conduttore potrà descrivere l'intera circonferenza $CsrDr's'$, cioè potrà ad arbitrio muoversi con moto continuo o con moto alternativo; ma a cagione dei quattro punti di regresso, anche quando il braccio conduttore camminerà con moto continuo, il braccio condotto andrà necessariamente con moto alternativo oscillando da R in S′ e da S′ in R, oppure da R′ in S e da S in R′.

Noi abbiamo supposto il braccio conduttore più breve, che il braccio condotto: se supponessimo al contrario, che fosse BR il braccio conduttore, AS il braccio condotto, troveremmo che il primo necessariamente camminerebbe con moto oscillatorio, poichè alle posizioni BR, BR′ corrisponderebbero due punti morti di prima specie, ed alle posizioni BS, BS′ due punti morti di seconda specie: ma il braccio condotto potrebbe camminare con moto continuo, oppure con moto alternativo.

Nella ipotesi che il braccio conduttore sia il minore dei due, e supponendo che esso, partendosi da S, giri equabilmente pel verso $ss'r'r$ descrivendo l'intera circonferenza, il braccio condotto verrà da S in R′ e poi da R′ in S con la legge rappresentata dalle due curve $SR's$ ed $Sr's$ della *fig.* 2. *bis*, relative la prima agli spazii, la seconda alle velocità. Scorgesi da entrambe queste curve che sì il moto diretto, come il retrogrado sono accelerati da principio, poi ritardati, ma con leggi differenti; e che la durata del primo movimento è maggiore di quella del secondo, come appare anche chiaramente dalla *fig.* 2, nella quale l'arco $ss'r'$ è un po' maggiore della semi-circonferenza. Diminuendo od accrescendo alcun poco la lunghezza del tirante si può accrescere o diminuire a piacimento la differenza delle durate delle due corse, e si può anche far sì che queste durate sieno perfettamente eguali tra di loro; la qual cosa avverrà quando i quattro punti $s$, $r'$, S, R' (*fig.* 2) verranno a cadere in linea retta; poichè allora l'arco $ss'r'$ sarà eguale all'arco opposto $r'rs$. Accorciando ancora di più il tirante l'arco $ss'r'$ diverrà minore della semi-circonferenza, e l'arco $r'rs$, maggiore; epperò la durata del moto diretto diverrà minore di quella del moto retrogrado.

191. *Supposizione terza* (*tav.* 22, *fig.* 3).

Tirante maggiore di DF<br>— minore di CF.

Con gli stessi metodi finquì praticati si riconoscerà facilmente che in questa terza supposizione non vi possono essere punti singolari della prima specie; ma che vi saranno bensì due punti morti A$n$NB, A$n'$N'B, e due punti di regresso A$s$SB, A$s'$S'B', tutti di seconda specie. Nè il braccio conduttore, nè il braccio condotto non posson dunque mai muoversi con moto continuo; ma il primo necessariamente oscilla per l'arco $ns$C$s'n'$ senza poter mai passare sull'arco opposto $n$D$n'$; il secondo similmente di necessità si contiene sempre sull'arco SNFN'S' senza passare mai sull'arco opposto SES'.

La *fig.* 3. *bis* contiene la rappresentazione grafica di questo movimento; partendo il movente dal punto $n$ (*fig.* 3) il cedente può incamminarsi verso S oppure verso S'; supponendo ch'esso prenda quest'ultima direzione, la curva $n$S'N' (*fig.* 3. *bis*) fa vedere come esso vada prima allontanandosi dal suo punto di partenza N fino in S', poi retrocedendo fino in N', mentre il movente percorre con moto equabile l'arco $nss'n'$. La curva punteggiata Vs'V', che è quella delle velocità, fa palese che quella del cedente, infinita al principio del movimento, rapidissimamente decresce, e divien nulla quand'esso è passato in S'; da questo punto la velocità ricomincia a crescere, ma in direzione contraria, finchè torni a diventare infinita quando il cedente giungerà in N'. Anche quì non è difficile di comprendere come andrebbero modificate le due curve nS'N', Vs'V', se il cedente dapprincipio s'incamminasse per l'arco NS.

Da tutta questa discussione che ne' tre ultimi §§ abbiam fatta de' punti singolari e delle vicende del movimento, nel primo de' sei casi che abbiamo distinti, cioè in quello in cui la somma de' due bracci è minore delle distanze dei centri, dobbiam dunque concludere:

1° Che quando il tirante è maggiore di DE e minore di CE vi sono due punti morti e due punti di regresso, tutti e quattro di prima specie, ed il movimento di entrambi i bracci è necessariamente alternativo.

2° Che quando il tirante, maggiore di CE, è minore di DF, vi ha quattro punti morti, oppure quattro punti di regresso secondochè il braccio conduttore è più corto, o più lungo che il braccio condotto; in questa supposizione il braccio minore può aver moto continuo; quello dell'altro braccio di necessità è alternativo.

3° E finalmente quando la lunghezza del tirante è compresa tra DF e CF vi sono due punti morti e due punti di regresso tutti e quattro della seconda specie, onde il movimento è alternativo tanto pel braccio conduttore, quanto pel braccio condotto.

192. Inutile, quanto molesta fatica, sarebbe il ripetere sovra ciascuno de' sei casi che abbiamo distinti, e per ciascuna supposizione intorno alla lunghezza del tirante, l'espressione di una analisi in tutto simile a quella che ora abbiam fatta del primo caso. Per gli altri cinque adunque noi abbiamo raccolti nel quadro seguente i risultati di questa analisi, nel

supposto chè il braccio conduttore fosse sempre minore del braccio condotto; ogni qual volta in questa ipotesi i punti di regresso ed i punti morti saranno in egual numero e della stessa specie, l'ipotesi contraria (che cioè il braccio condutiore fosse maggiore dell'altro) non produrrebbe ne' risultati verun cangiamento, e così avviene il più delle volte, cioè tredici volte sopra vent'una.

Quando poi questo fatto non si verifichi, e i punti di regresso differiscano dai punti morti in numero ed in ispecie, per passare dall'ipotesi di $AP < BQ$ alla ipotesi di $AP > BQ$ basterà intendere mutati i punti morti in punti di regresso e viceversa. - Così, per esempio, per la seconda varietà del primo caso la tavola notando quattro punti morti; cioè due di prima e due di seconda specie; se ne concluderà che quando sia $AP > BQ$, si avranno quattro punti di regresso, due di prima e due di seconda specie: così ancora per la prima varietà del sesto caso, la tavola indicando due punti morti di seconda specie, e due punti di regresso di prima, nel supposto di $AP > BQ$, si avranno due punti morti di prima specie, e due punti di regresso di seconda.

| Indicazione dei casi e delle figure della tavola 22. | Lunghezza del tirante | Punti morti 1ª specie | Punti morti 2ª specie | Punti di regresso 1ª specie | Punti di regresso 2ª specie |
|---|---|---|---|---|---|
| I. Caso. | 1° $>DE$ ; $<CE$ | 2 | » | 2 | » |
| $AP+BQ<AB$ | 2° $>CE$ ; $<DF^*$ | 2 | 2 | » | » |
| *fig.* 1, 2 e 3. | 3° $>DF$ ; $<CF$ | » | 2 | » | 2 |
| II. Caso. | 1° $<DE$ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $AP<BQ<AB$ | 2° $>DE$ ; $<CE$ | 2 | » | 2 | » |
| $AP+BQ>AB$ | 3° $>CE$ ; $<DF^*$ | » | » | 2 | 2 |
| *fig.* 7. | 4° $>DF$ ; $<CF$ | » | 2 | » | 2 |
| III. Caso. | 1° $<CE$ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $AP<AB$ ; $BQ>AB$ | 2° $>CE$ ; $<DE^*$ | » | 2 | 2 | » |
| *le circonferenze si tagliano.* | 3° $>DE$ ; $<DF^*$ | » | » | 2 | 2 |
| *fig.* 8. | 4° $>DF$ ; $<CF$ | » | 2 | » | 2 |
| IV. Caso. | 1° $>CE$ ; $<DE^*$ | » | 2 | 2 | » |
| $AP<AB$ ; $BQ>AB$ | 2° $>DE$ ; $<DF^*$ | » | » | 2 | 2 |
| *le circonferenze non si tagliano* *fig.* 9. | 3° $>DF$ ; $<CF$ | » | 2 | » | 2 |
| V. Caso. | 1° $<CE$ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $BQ>AP>AB$ | 2° $>CE$ ; $<DF^*$ | » | 2 | 2 | » |
| *le circonferenze si tagliano* | 3° $>DF$ ; $<DE$ | » | » | » | » |
| *fig.* 10. | 4° $>DE$ ; $<CF$ | » | 2 | » | 2 |
| VI. Caso. | 1° $>CE$ ; $<DF^*$ | » | 2 | 2 | » |
| $BQ>AP>AB$ | 2° $>DF$ ; $<DE$ | » | » | » | » |
| *le circonferenze non si tagliano* *fig.* 11. | 3° $>DE$ ; CF | » | 2 | » | 2 |

NB. L'asterisco indica i casi ne'quali mutando il braccio condotto in braccio conduttore e viceversa, i punti morti si cangiano in punti di regresso, e viceversa.

Esaminando questa tavola vedrà il lettore, che fra le venti e una varietà che vi si annoverano, ve ne ha due sole nelle quali la combinazione di due braccia e di un tirante vada esente da ogni specie di punti singolari. Sono queste la terza del 5° caso e la seconda del 6°, corrispondenti alle *figg.* 10 ed 11 della *tav.* 22, nella supposizione che il tirante si faccia maggiore di DF e minore di DE. In queste due sole varietà adunque (che ci riserbiamo di studiare più minutamente nel capitolo seguente) possono entrambi i bracci avere un moto continuo; in tutte le altre varietà o l'uno, o l'altro braccio, od entrambi hanno necessariamente moto alternativo.

193. Quando uno dei due bracci si fa crescere all'infinito, la circonferenza da esso descritta si muta in linea retta, e il meccanismo si trasforma in una manovella, equivalente ne' suoi effetti ad un eccentrico di contorno circolare. Di questi organi meccanici, considerati come pezzi conduttori, ho già trattato nel capitolo undecimo; aggiungerò ora ciò che par più necessario a sapersi, anche pel caso che la manovella, ossia il braccio di lunghezza finita sia il pezzo condotto.

Nelle quattro *figg.* 3, 4, 5 e 6 della *tav.* 23 è rappresentato il modo di operare di questo meccanismo, per la trasformazione del movimento circolare in rettilineo, o del movimento rettilineo in circolare. In tutte e quattro le figure l'estremità P del tirante PQ si muove circolarmente intorno al centro A; ma l'altro capo Q per essere guidato da piegatelli o da altro congegno qualsiasi, è costretto a camminare in linea retta. Havvi però tra le quattro figure questa differenza, che nelle due prime la direzione del moto del punto Q vien passare pel centro A del movimento della manovella, mentre nelle due ultime la direzione del punto Q è eccentrica, cioè non passa pel centro A.

Nella *fig.* 3 il tirante PQ si finge minore del braccio AP della manovella; ora il punto P non può mai allontanarsi dalla retta HH′, sulla quale si muove il punto Q ad una distanza maggiore della lunghezza PQ del tirante; condotte adunque di qua e di là di HH′, le parallele $mm''$, $m'm'''$ a distanze eguali a PQ, il punto P non potrà mai oltrepassare sulla circonferenza da esso descritta le posizioni $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, cioè sarà obbligato a muoversi con moto alterno, o sull'arco sinistro $mm'$, o sull'arco destro $m''m'''$, senza mai trascorrere sugli archi $mm''$, $m'm'''$. La distanza poi del punto Q dal centro A, non potendo mai esser nè maggiore della somma AR delle lunghezze del braccio AP e del tirante PQ, nè minore della differenza AR′ di queste lunghezze medesime; questo punto Q di necessità si muoverà tra i termini R, R′ che saranno le sue posizioni di regresso. Se la manovella è il pezzo movente, all'istante in cui il punto P giungerà in $m$, oppure in $m'$, il punto Q sarà venuto in M, il tirante PQ sarà perpendicolare ad AM, e la macchina si troverà in un punto morto, cioè retrocedendo P, il punto Q potrà proseguire il suo cammino con la direzione primitiva, oppure indietreggiare. Le stesse considerazioni si applicano al caso in cui la manovella si faccia oscillare per l'arco destro $m''m'''$.

Qualora poi sia la stanghetta HQ il movente, la manovella avrà due punti di regresso in $m$, $m'$, ed un punto morto in $r$, se essa si muove sull'arco sinistro: se si muove sull'arco destro, i punti di regresso saranno $m''$, $m'''$ ed il punto morto $r'$.

Quale che sia il movente, il punto Q potendosi considerare come mobile intorno ad un centro B collocato a distanza infinita sulla QB perpendicolare ad HH′, le velocità assolute di P e di Q staranno tra di loro come le distanze PK, QK di questi punti, dall'incontro K di questa perpendicolare QB col prolungamento di AP, onde sarà sempre facile il descrivere la curva che in ciaschedun caso rappresentano le leggi con cui variano gli spazii descritti e le velocità acquistate dal pezzo condotto, mentre l'altro pezzo cammina equabilmente. Pel caso della *fig.* 3 queste due curve si veggono disegnate nella *fig.* 3. *bis*, nel supposto che la manovella sia il pezzo condotto; la retta RR′ rappresenta l'intervallo segnato con le medesime lettere nella *fig.* 3, e dal quale non può uscire il capo Q del tirante: le ordinate della curva RP$m$R′ segnata con linea piena mostrano con qual legge vada prima crescendo, poi diminuendo l'arco $r$P che l'altro capo del tirante percorre prima con moto diretto, poi con moto retrogrado, mentre Q viene equabilmente da R in R′. La curva punteggiata VV′, le cui ordinate rappresentano i successivi valori che riceve la velocità delle manovelle in tutte le posizioni del punto Q, mostra che questa velocità è infinita nel primo istante nel moto, diminuisce rapidamente e divien nulla quando il tirante è venuto nella posizione perpendicolare M$m$, e da questo istante, facendosi negativa (cioè diretta in senso contrario al primo) torna a crescere rapidamente e diviene ancora infinita quando il punto Q è venuto in R′ ed il punto P è ritornato in $r$, nel suo punto di partenza. In questo, come in tutti gli altri casi in cui si trovano valori infiniti per la velocità del pezzo condotto in certe determinate posizioni, resta evidente che un tal valore non potendo mai verificarsi effettivamente, dee concludersene che egli è impossibile di far sì che il pezzo motore cammini equabilmente nelle vicinanze delle posizioni, alle quali corrispondono que' valori infiniti.

Nella *fig.* 4 il tirante si suppone maggiore del braccio della manovella; allora è facile lo scorgere che questa può prendere qualsivoglia posizione intorno al punto A, cioè che il suo movimento può essere continuo. Se essa è conduttrice non vi sono punti morti, e i regressi di Q (supposto alla sinistra di A) sono in R, R′ alle distanze, AR eguale alla somma, ed AR′ eguale alla differenza del tirante e del braccio; oppure, in R″, R‴ alle medesime distanze da A, se si suppone che il punto Q sia alla destra di questo centro. Se poi la stanghetta conduce la manovella, non vi sono punti di regresso, e la manovella ha due punti morti, uno in $r$, l'altro in $r'$.

194. Se la direzione della linea descritta dal punto Q non passa pel centro A, il moto della manovella sarà ancora alternativo, oppure potrà essere continuo, secondochè la lunghezza del tirante PQ si farà minore oppure maggiore della distanza EC (*figg.* 5 e 6).

Col tirante minore di EC (*fig.* 5) se sarà conduttrice la manovella, vi saranno due punti morti *m*, *m''*, i quali si troveranno tirando *mm''* parallela alla linea HH′ su cui si muove il punto Q, e distante da essa quanto è lungo il tirante, il quale in questi due punti morti è perpendicolare alla linea HH′; i punti di regresso R, R′ si segnano tagliando la retta HH′ con un arco di circolo descritto dal centro A e con raggio eguale al tirante più il braccio della manovella. Tutti i punti singolari sono qui di prima specie.

Col tirante maggiore di EC (*fig.* 6), ed essendo sempre conduttrice la manovella, non vi sono punti morti di sorta, ond'essa può muoversi tutt'intorno al centro A con moto continuo; i punti di regresso poi sono quattro, due di prima specie R, R′ e due di seconda S, S′; essi trovansi tagliando la linea HH′ con due archi di circolo descritti dal centro A, co' raggi AR, AS eguali, uno alla somma, l'altro alle differenze del tirante e del braccio: il punto Q adunque necessariamente si muove oscillando tra i punti R, S, oppure tra i punti R′, S′, nè mai può passare tra S ed S′, oppure all'infuori di R o di R′.

In entrambe le ipotesi, quando la manovella sarà il pezzo condotto, i punti morti ed i punti di regresso si scambieranno tra loro, ed il movimento della manovella si farà con le leggi espresse graficamente nelle *figg.* 5. *bis* e 6. *bis*. Nella prima di queste figure la retta RR′ rappresenta l'intervallo segnato con le medesime lettere nella *fig.* 5: la curva RP*mrr′* si è costrutta prendendo per ascisse gli spazii equabilmente descritti dal punto Q, e per ordinate gli archi corrispondenti descritti dal punto P: essa mostra con qual legge il punto P venga allontanandosi dal suo punto di partenza $r$ fino in $m$; poi torni ad accostarsi ad esso, e quindi oltrepassandolo trascorra per l'arco $rDr'$. La curva punteggiata VV' manifesta le vicende cui va intanto soggetta la velocità del punto P.

Nella *fig.* 6. *bis* relativa al caso espresso nella *fig.* 6, la retta RS rappresenta l'intervallo designato con le medesime lettere in quest'ultima figura. La curva piena $RPs's$ è la rappresentazion della legge con cui va crescendo l'arco descritto dal punto P, mentr'esso, partendo da $r$, percorre l'arco $rPs'Cs$, durante il moto diretto della stanghetta Q da R in S; il prolungamento $sr's'r$ della medesima curva rappresenta la continuazion del moto del medesimo punto P per l'arco $sr'Dr$ durante il ritorno di Q da S in R. Le due curve punteggiate $UuU'$, $VvV'$ sono la rappresentazione della legge delle variazioni della velocità della manovella in questi due periodi del suo movimento (1).

(1) Per esprimere analiticamente le relazioni che passano tra le posizioni e le velocità dei due capi del tirante dicansi: il braccio della manovella $AP = a$, la lunghezza del tirante $PQ = l$, la distanza AE del centro A dalla retta HH' descritta dal punto $Q = h$; e designando ancora con $\varphi$ e $\theta$ gli angoli variabili PQR', PAI (*fig.* 6), e con $x$ la distanza EQ, si avranno le due equazioni

$$\left.\begin{array}{l} l \sin \varphi - a \sin \theta = h \\ l \cos \varphi + a \cos \theta = x \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Quando il movente è la manovella AP, l'angolo $\theta$ e la velocità della manovella si considerano come quantità conosciute, e si ha

$$x = \sqrt{l^2 - (h + a \sin \theta)^2} + a \cos \theta\,;$$

differenziando rispetto al tempo, ed osservando che $\frac{dx}{dt}$, e $\frac{d\theta}{dt}$ sono la velocità assoluta del punto Q, e la velocità angolare della manovella,

195. Nel prendere finalmente commiato dai tiranti, io indicherò con tre esempi alcune applicazioni delle proprietà che lo studio precedente ci ha fatte scoprire in questi meccanismi.

*Esempio primo.* Movendosi un braccio AP (*fig.* 7) con moto alternativo per l'arco CC′, si vuol comunicare il movimento ad un altro braccio BQ, in modo che questo faccia due oscillazioni mentre il primo ne fa una sola.

Si divida l'arco CC′ in due parti eguali nel punto D, e si conduca il raggio AD prolungandolo fino in R della quantità DR, eguale alla lunghezza del tirante PQ. Dal punto C o dal punto C′ con apertura di compasso eguale alla medesima lunghezza PQ si tagli la retta AR in H. Sulla retta HR come base e coi lati HB, RB eguali alla lunghezza del braccio condotto BQ, si faccia il triangolo isoscele HBR; dico che prendendo il punto B per centro del moto di questo braccio BQ, esso farà due oscillazioni per ogni una che ne farà il braccio AP.

Infatti il punto Q si troverà in H, sia che il braccio condotto venga nella posizione AC, sia che venga nella posizione AC′; quando poi esso sarà in AD, il punto Q sarà in R. Dunque venendo il braccio conduttore da C in D, il braccio condotto farà una corsa diretta da H in R, e seguitando il primo braccio il suo cammino da D in C′, il secondo farà una corsa retrograda da R in H.

si ha, rappresentando queste due velocità con le lettere $u$ ed $\omega$

$$u = -a\omega\left(a \sin\theta + \frac{(h + a\sin\theta)\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (h + a\sin\theta)^2}}\right).$$

Se poi la manovella sarà il pezzo condotto, le due equazioni (1) dovranno risolversi rispetto a $\theta$ eliminandone l'angolo $\varphi$; e quindi differenziando si avrà la velocità angolare $\omega$ espressa in funzione di $x$, e della velocità data $u$.

Quantunque il moto del braccio AP sia equabile, non sarà mica equabile quello del braccio BQ; poichè essendo R un punto di regresso, la velocità di Q in questo punto è nulla, ed essa viene continuamente crescendo da R fino in H, epperò l'arco IH è percorso più velocemente che l'arco eguale RI: e tanto maggiore sarà l'accelerazione, quanto più brevi il braccio condotto ed il tirante rispetto all'arco CC′. Questa osservazione ci conduce all'

*Esempio secondo.* Muovendosi equabilmente il braccio AP (*fig.* 8) sull'arco dato CC′, trasformare questo movimento in un altro rapidissimamente ritardato.

Dividasi l'arco dato in qualsivoglia numero di parti eguali, per esempio in quattro, ne' punti 1, 2, 3, e pel primo punto di divisione 1 si conduca il raggio DA, e si prolunghi indefinitivamente; poi segnisi il punto 1′ alla distanza D1′ eguale alla lunghezza del tirante PQ. Centro in C′ con apertura eguale alla medesima lunghezza si tagli in 4′ la retta D1′ prolungata, e sopra 1′4′ come base si costituisca il triangolo isoscele 1′B4′.

Collocando in B il centro del moto del braccio BQ eguale a B1′, il moto di questo braccio rapidissimamente si rallenterà nel venire da 4′ verso 1′.

Il punto 1′ è un punto di regresso di seconda specie: dunque quando il braccio AD si trova in AC, e quando si trova in A2, il braccio condotto BQ si troverà nelle due posizioni quasi identiche B0′, B2′, entrambe vicinissime a B1′; cioè venendo AP da AC in A2, descriverà BQ gli archetti appena sensibili 01′ ed 1′2′; ma passando AP da A2 in A4, il braccio BQ descriverà l'arco molto maggiore 2′4′, nel medesimo tempo che aveva impiegato a descrivere quegli archetti. Dunque il moto da 1′ in 4′ sarà rapidissimamente accelerato, ed il moto retrogrado da 4′ in 1′ rapidissimamente ritardato.

*Esempio terzo.* Muovendosi equabilmente il braccio AP sull'arco CC′ (*fig.* 9), comunicare un moto intermittente a due altri bracci B'Q', B''Q'', in modo che l'uno di essi stia fermo mentre l'altro cammina, e viceversa.

Si divida l'arco dato CC' in quattro parti eguali ne' punti 1, 2, 3, e pei punti 1, 3 si tirino i raggi 1A, 3A prolungandoli in 1', 3'' tanto che siano 1.1', 3.3'' eguali ai tiranti PQ', PQ'' che debbono tramandare il movimento di AP ai bracci B'Q', B''Q''; poi fatto centro in C con raggio eguale a PQ' si tagli la retta A1' prolungata nel punto 0', e fatto centro in C' con apertura di compasso eguale a PQ'' si tagli la retta A3'' in 4''. Sulle basi 1'.0', 3''.4'' si costruiscano i triangoli isosceli 1'B'0', 3''B''4'', ed in B', B'' si fermino i centri dei due bracci condotti B'Q', B''Q'' rispettivamente eguali a B'1', B''3''.

Non è difficile lo scorgere quale sarà l'effetto di questa disposizione. Quando il braccio AP è in A1, il braccio B'Q' è in un punto di regresso, epperò venendo AP da AC in A2, BQ' appena si muove: ma seguitando AP il suo cammino col percorrere l'arco 2.3C', il braccio B'Q' rapidamente si accelera, e descrive l'arco 0'.3'.4'. Tutto all'incontro, quando AP è in A3, B''Q'' è in un punto di regresso, onde questo braccio non ha moto sensibile mentre AP passa da A2 in AC', e si muove rapidamente, mentre AP passa da AC in A2: i due bracci B'Q', B''Q'' hanno dunque moti sensibilmente intermittenti, e l'uno cammina mentre l'altro riposa.

196. Il problema svolto nel presente capitolo non è che un caso particolarissimo di quest'altro:

« Dati due punti materiali P, Q costretti a seguire l'anda-
« mento di due curve qualunque date A, B rispettivamente,
« e connessi tra di loro da un tirante di lunghezza invaria-
« bile $l$; per ciascuna posizione del punto P trovare: 1° La
« corrispondente posizione del punto Q; 2° La ragione delle
« velocità di questi due punti. »

Ad un arco infinitamente breve di qualsiasi curva potendo sempre intendersi sostituito il corrispondente arco del circolo osculatore di essa, scorgesi che le due parti della quistione si risolveranno:

1° Facendo centro nel punto P, e con raggio $= l$ descrivendo un arco di circolo; poichè la intersezione di quest'arco con la curva B darà la cercata posizione del punto Q.

2° Segnando i centri di curvatura O, O′ delle due curve A, B ne' punti P, Q, chiamando R, R′ i due raggi di curvatura, e prendendo a considerare un sistema composto di due braccia R, R′ mobili intorno ai centri O, O′, e connesse da un tirante $= l$. Poichè è manifesto che per un istante il moto di questo tirante sarà identicamente lo stesso che quello del tirante che congiunge i dati punti P, Q.

Da ciò ancora si vede, come potranno determinarsi i punti singolari del sistema, i quali saranno manifestamente quelli per cui il tirante coinciderà con la normale dell'una o dell'altra curva; cioè, con quella della curva B descritta dal punto condotto Q, pei punti morti; e con quella della curva A descritta dal punto conduttore P, pei punti di regresso; e questi punti singolari apparterranno alla prima od alla seconda specie, secondo che il tirante cadrà dalla parte della convessità, oppure dalla parte della concavità della curva.

# CAPITOLO VENTESIMONONO

## DEI GIUNTI E DEGLI INNESTI MOBILI.

197. I meccanismi, di cui intendo ora trattare, appartengono tutti alla trasformazione del moto rotatorio equabile in moto rotatorio equabile o non equabile, e s'impiegano a comunicare il movimento tra due alberi che si possono riguardare come prolungamento uno dell'altro, sia che infatti gli assi loro sieno collocati in linea retta, sia che abbiano direzioni parallele od inclinate, o sia finalmente che cadano in piani differenti. Daremo il nome di *giunti* a quelli fra gli accennati meccanismi che stabiliscono una congiunzione permanente fra i due alberi, cosicchè l'uno non possa mai girare senza trasmettere all'altro il suo movimento: e distingueremo col nome di *innesti mobili* quegli altri meccanismi ne' quali la comunicazione del moto si può a piacimento interrompere e ristabilire senza scomporre la macchina, e mercè di un semplice cangiamento di luogo di alcuna delle sue parti. Gli esempi ch'io sto per addurre dichiareranno meglio che non potrebbe fare un più lungo discorso la distinzione così stabilita tra i giunti e gli innesti.

Come primo esempio di un giunto ricorderemo le ruote a tre tiranti rappresentate nella *fig.* 8 della *tav.* 20, nel qual meccanismo le velocità angolari dei due pezzi sono costantemente eguali tra di loro; non così avviene in quello che ora passiamo a descrivere; sieno A*a*, B*b* (*tav.* 24, *fig.* 1) due alberi paralleli le cui estremità vicine A, B si trovino a poca distanza di qua e di là di un piano perpendicolare agli alberi medesimi. Sieno fermate in queste estremità due braccia AP, BQ, entrambe maggiori della distanza AB dei due assi, e si uniscano le due braccia con un tirante PQ di lunghezza conveniente; secondo ciò che abbiam detto nel § 192 il movimento si trasmetterà in modo continuo dall'albero A$a$ all'albero B$b$.

Per ben comprendere le vicende di questa trasmissione basterà far qui l'applicazione delle regole stabilite nel capitolo che precede; rappresenti la *fig.* 2, *tav.* 24, il piano in cui si muove il tirante PQ; siano AP, BQ le lunghezze delle due braccia; CPDP′, EQFQ′ le circonferenze descritte dalle loro estremità intorno ai centri A, B; PQ il tirante, la cui lunghezza dovrà essere maggiore di CE e minore di ED.

All'istante in cui il braccio AP passerà per la linea dei centri confondendosi con AC, oppure con AD, il punto di intersezione del tirante con la linea dei centri cadrà in C; oppure in D: nella prima posizione la velocità angolare di BQ sarà dunque minore di quella di AP, nella ragione di AC al BC: e nella seconda posizione sarà maggiore nella ragione di AD al BD. Supponiamo, per esempio, che sia AP $= 30^{\text{cent.}}$, BQ $= 25^{\text{cent.}}$, AB $= 10^{\text{cent.}}$, e PQ $= 20^{\text{cent.}}$: presa per unità la velocità angolare del braccio AP, quella di BA in C sarà $= \frac{3}{4}$ ed in D sarà $= \frac{3}{2}$.

Quando poi verrà sulla linea dei centri il braccio condotto BQ, cadendo la sua estremità Q in E, oppure in F, sarà la velocità angolare di BQ minore di quella di AP, nella ragione di AE al BE nel primo caso, e nel secondo caso sarà maggiore nella ragione di AF al BF: nè è difficile di vedere che supponendo equabile il movimento di AP, la minima velocità di BQ avrà luogo quando questo braccio si confonderà con BE, e la sua velocità massima quando si confonderà con BF.

Ritenendo i medesimi valori numerici che abbiamo assunti testè, la velocità di BQ quando Q passa pel punto E, sarà $= \frac{3}{5}$, e quando il medesimo punto passa per F, la sua velocità angolare sarà $= \frac{7}{5}$, e si troverà pur facilmente sia con costruzioni, sia con calcoli trigonometrici, che nella prima posizione del tirante sarà il corrispondente angolo

$$pAC = 36^\circ.20' ,$$

e nella seconda $\quad p'AC = 214^\circ.46'$ .

Quanto alle posizioni PQ, P'Q' in cui essendo il tirante parallelo alla linea dei centri, i due bracci s'avanzano con la medesima velocità angolare, sarà facile il determinarle formando i due triangoli APR, BQ'R', l'uno co' lati AP, PR=BQ, ed AR=PQ—AB; l'altro co'lati BQ', Q'R'=AP, e BR' = PQ + AB, i quali triangoli faranno conoscere gli angoli PAR, P'AR'; così nell'esempio numerico ora assunto si troverà, vuoi per mezzo di costruzione grafica, vuoi per mezzo de' computi trigonometrici

$$\text{Ang}\, PAR = 51^\circ.19' ,$$

$$\text{Ang}\, P'AR' = 49^\circ.15' .$$

Con questi valori è facile accertarsi che, rappresentando l'intera circonferenza $CpP'Dp'PC$ con la retta CC (*fig.* 3), le variazioni della velocità angolare del braccio condotto BQ saranno fedelmente rappresentate dalla curva $cP'DPc$, nella quale si è supposta rappresentata da una lunghezza di 30 millimetri la velocità angolare del braccio conduttore.

198. La *fig.* 4, *tav.* 24 rappresenta un giunto non meno semplice del precedente; gli alberi paralleli A$a$, B$b$ portano qui pure due bracci AP, BQ, ma questi invece di essere congiunti con un tirante si tramandano il movimento per via di una caviglia PP' piantata nel braccio AP, e inserta in un fesso rettilineo EF dell'altro braccio BQ. Acciocchè il moto possa trasmettersi per l'intera circonferenza, ossia acciò la macchina

possa camminare con moto continuo, basta che il fesso sia abbastanza lungo, cioè che sia la distanza BE minore di AP meno AB, e BF maggiore di AB più BP.

Il movimento trasmettendosi per contatto immediato tra la caviglia P e l'orlo del fesso EF, la linea di azione è qui la NPT perpendicolare alla direzione del fesso (*fig.* 5), e la velocità angolare del braccio BQ sta a quella del braccio AP, come TA sta al TB, oppure come la perpendicolare AI alla perpendicolare BP; e da ciò è facile pure di conchiudere, che la velocità angolare di BQ sarà massima quando questo braccio cadrà sulla linea dei centri in BC, e minima quando esso cadrà in BD: nel primo caso essa starà a quella del braccio AP come CA al CB, e nel secondo caso come DA al DB. Le velocità angolari dei due bracci saranno eguali quando il braccio BQ si troverà in B$m$ od in B$m'$, perpendicolare alla linea dei centri, poichè allora la linea di azione sarà parallela ad AB (1).

(1) Sia $a$ la lunghezza del braccio AP, ossia la distanza della caviglia od asticciuola PP' dall'asse A$a$, e $c$ la distanza AB de'due assi (*fig.* 5); dicansi poi $\varphi$, $\psi$ gli angoli PAD, QBD che i due bracci faranno in qualsivoglia istante con la linea dei centri BA prolungata.

Nel triangolo ABM sarà

$$\sin\psi : \sin(\varphi-\psi) :: a : c\,,$$

onde

$$\operatorname{cotang}\psi = \frac{c}{a\sin\varphi} + \operatorname{cotang}\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

e differenziando $$d\psi = a\,d\varphi \,.\, \frac{a + c\cos\varphi}{a^2 + 2ac\cos\varphi + c^2}.$$

Se dunque si suppone, che sia AP il braccio conduttore e ch'esso giri con velocità angolare costante $\alpha$, la velocità angolare variabile del braccio BQ sarà

$$\omega = \frac{a(a + c\cos\varphi)}{a^2 + 2ac\cos\varphi + c^2}\,\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se al contrario si supporrà, che il movente equabile sia BQ, per ogni

199. Il giunto di Oldham, rappresentato nella *fig.* 7, *tav.* 24, serve come i due precedenti a trasmettere il moto tra due alberi paralleli A$a$, B$b$; ma qui l'albero condotto gira sempre con la medesima velocità dell'albero conduttore, come tosto dimostreremo. Ciascuno dei due alberi porta alla sua estremità una forcella FAF, GBG: i quattro rebbii di queste forcelle hanno in F, F, G, G quattro fori, i quali si trovano tutti nello stesso piano perpendicolare alle lunghezze de' due alberi, ne' quali fori scorrono liberamente le quattro braccia della croce CDDEE. Se ora si fa girare l'albero A$a$, girano insieme con esso la forcella FAF e l'asta ECE della croce, e quindi anche l'altr'asta DCD, la quale essendo sempre perpendicolare alla prima, si muoverà sempre per un angolo eguale a quello descritto da essa; e per conseguenza gli angoli descritti dai due alberi saranno sempre eguali, e sempre eguali le velocità angolari di essi.

Le due circonferenze G$g$G$g$, F$f$F$f$ (*fig.* 8) rappresentano quelle che i rebbii delle due forcelle descrivono intorno agli assi A$a$, B$b$; in FF sono le estremità dei rebbii della forcella conduttrice, in GG quelle della forcella condotta; l'asta DD della croce in tutte le posizioni della macchina passerà sempre pel centro B, l'altr'asta passerà pur sempre pel centro A, epperò il centro C della croce si troverà sempre sulla circonferenza di un circolo di diametro eguale alla distanza AB dei due centri, poichè l'angolo DCE è retto, e i suoi lati passano sempre per le due estremità del diametro AB.

dato valore di $\psi$ si avrà dalla (1) il corrispondente valore di $\varphi$; ed eliminando quest'angolo dalla (2) si otterrà l'espressione della corrispondente velocità angolare $\alpha$ del cedente AP.

La curva $dmc$ (*tav.* 24, *fig.* 6) mostra con qual legge vada crescendo la velocità del braccio BQ mentre AP percorre equabilmente la semicirconferenza DP$m$C; nella semiperiferia seguente la velocità di BQ tornerebbe a diminuire con la medesima legge. La figura suppone che il movente AP abbia una velocità angolare rappresentata da una lunghezza di 20 millimetri.

Così costrutto il giunto di *Oldham*, o giunto *a croce*, sarebbe troppo debole quando avesse a trasmettere grandi sforzi; ma allora alle due forcelle si sostituiscono due robusti dischi di metallo calettati perpendicolarmente alle estremità dei due alberi, ed in contatto tra loro; nelle due facce che si toccano si scolpiscono due profondi solchi secondo due diametri, che in tutte le posizioni del meccanismo si trovan mantenuti in direzioni tra di loro perpendicolari, da una croce, le cui due aste di sezione rettangola, collocate in piani differenti, scorrono ciascuna entro uno di que' solchi, senza sporger punto al dissopra della superficie del disco.

200. Simile nella sua forma al giunto di Oldham è il giunto di Hooke o giunto universale (*fig.* 11), ma ben diverso ne' suoi effetti. Qui pure due alberi A$a$, B$b$ armati di forcelle FAF, GAG sono uniti per via di una croce GGFFC; ma i due alberi non sono paralleli, e le braccia della croce non possono scorrere, ma soltanto girare nei fori F, F, G, G dei rebbii delle forcelle, cosicchè il punto C è sempre a metà di GG e di FF, e gli assi A$a$, B$b$ prolungati passano sempre pel punto C; quì finalmente il moto non si trasmette con ragione equabile di velocità, come si dirà fra poco.

Una bella proprietà del giunto di Hooke, per la quale appunto gli si dà il nome di *giunto universale*, consiste in ciò ch'esso si adatta a qualunque angolo d'assi, cioè che uno stesso giunto può egualmente servire a congiungere due alberi che facciano tra loro un angolo qualunque. In altre parole, ritenendo l'albero A$a$ una direzione determinata, si posson far prendere all'albero B$b$ tutte le direzioni immaginabili intorno al punto C senza punto scomporre il giunto, e senza che il moto rotatorio del primo albero cessi di comunicarsi al secondo.

Per far comprendere la ragione di questa proprietà io descriverò quì un altro congegno d'invenzione assai più antica che il giunto di Hooke, e conosciuto sotto il nome di *sospensione cardanica* (1); esso è impiegato sulle navi a tener sospesa la bussola in modo ch'essa si mantenga sempre orizzontale, comunque s'inclini la nave; se ne fa pure un uso meno importante, ma più famigliare, impiegandolo nella sospensione di certe lampade portatili, affinchè coll'inclinarne il gambo da questa parte o da quella la fiamma non si spenga e l'olio non si spanda.

Sieno FLFL, MGMG (*fig.* 9) due anelli di metallo di diametri tali che il secondo possa liberamente passare nel primo; e sieno ME, ME due perni fitti nell'anello minore alle due estremità del diametro MM, e girevoli entro a due fori che attraversano l'anello maggiore alle due estremità del diametro FF; sia DODO un disco, o piano circolare di diametro un po' minore di quello del secondo anello, e mobile sopra i due perni DG, DG che attraversano questo anello alle due estremità del diametro GG, perpendicolare ad MM.

Fingiamo ora che l'anello esterno FLFL (*fig.* 10) si inclini in qualunque modo e da qualunque parte; dico che il disco DODO potrà tuttavia collocarsi sempre in posizione orizzontale. Infatti facendo girare l'anello interno MGMG sui perni EM, EM, il diametro GG genererà un piano perpendicolare ad EE; e siccome in un piano comunque collocato si può sempre tirare una retta orizzontale, sarà sempre fattibile di condurre l'anello interno MGMG in una tal posizione che la linea dei perni GG sia orizzontale; ed allora

(1) L'invenzione di questo congegno viene attribuita, come indica il nome stesso, a Girolamo Cardano medico, matematico e astrologo famoso, nato in Pavia nel 1501, e morto, siccome si racconta, volontariamente di fame in Roma nel 1576, affin di non ismentire la predizione ch'egli avea avuto l'audacia di fare dell'anno della propria morte. Egli è più conosciuto per le sue stranezze, i suoi vizi e le sue empietà, che per vero merito scientifico. La soluzione delle equazioni di 3° e di 4° grado che va sotto il suo nome non gli appartiene, avendone egli involato il merito al vero scopritore che fu Nicolò Tartaglia suo contemporaneo.

facendo girare il disco DODO intorno a' suoi perni D, D finchè il diametro OO sia anch' esso orizzontale, il piano DODO, contenendo due rette GG, DD che si tagliano in C e sono orizzontali, sarà esso pure orizzontale.

Ciò posto, se noi supponiamo per un istante, che nel centro del disco si pianti un albero CA perpendicolare al piano del disco medesimo; e che l'anello esterno ELFL si fermi ai due rebbii di una forcella fissata all'estremità di un secondo albero, perpendicolare al piano dell'anello, ritenendo il primo albero in posizione verticale, si potranno dare al secondo tutte le direzioni immaginabili intorno al punto C, cosicchè in grazia dei due assi FF, GG, intorno cui si muovono l'anello interno ed il disco, il giunto cardanico si può trasformare in un vero giunto universale; esso infatti essenzialmente non differisce dal giunto di Hooke.

201. Per iscoprire con qual legge giri la forcella condotta GBG intorno all'asse B$b$ (*fig.* 11) quando si dà alla forcella conduttrice FAF un moto equabile di rotazione intorno all'asse A$a$, conduciamo un piano per questi due assi, e nel punto C dov'essi s'incontrano facciam passare un altro piano perpendicolare all'asse conduttore A$a$. L'asta FF della croce, la quale noi chiameremo d'or innanzi *asta movente*, sarà sempre contenuta in questo secondo piano, e le estremità F, F dei rebbii AF, AF descriveranno in esso una circonferenza di circolo rappresentata in DEDE nella *fig.* 12, che si suppone segnata in quel piano. In questa figura il diametro EE è l'intersezione del piano della figura con quello che contiene i due assi, e il diametro DD, perpendicolare ad EE, è l'intersezione del piano della figura (perpendicolare all'asse A$a$) con un piano condotto pel centro C e perpendicolare all'asse B$b$. In questo ultimo piano si muove l'asta cedente GG della croce, descrivendo in esso una circonferenza eguale a DEDE; ma siccome il piano di questo circolo è inclinato al piano della figura, e fa con esso un angolo eguale a quello dei due assi,

se noi proietteremo su questo piano la circonferenza così descritta, la proiezione sarà una ellisse D$e$D$e$, che avrà per asse maggiore il diametro DD.

Supponiamo che al principio del movimento l'asta movente si confondesse col diametro DD; l'asta cedente era dunque allora proiettata in $e$C$e$; quando poi la prima asta nel girare intorno all'asse A$a$ sarà passata nella posizione FF, descrivendo l'angolo DCF, l'asta cedente, sempre perpendicolare ad FF, si troverà proiettata in $g$C$g$, cioè secondo una retta che fa con EE l'angolo EC$g$ eguale a DCF. In altri termini, mentre l'estremità F dell'asta movente avrà percorso l'arco di circolo DF nel piano della figura, l' estremità dell' asta cedente avrà descritto un altro arco di circolo, che sarà situato in un piano inclinato a quello della figura e che si proietterà in quest'ultimo piano sull'arco di ellisse $eg$. Pel punto $g$ si tiri G$g$H perpendicolare a DD, e non sarà difficile a riconoscere che l'arco di circolo di cui parliamo sarà eguale ad EG (1): e finalmente conchiuderemo che mentre la forcella movente avrà descritto l'angolo DCF, la forcella cedente avrà descritto l'angolo minore ECG: e con questa semplice costruzione sarà sempre facile di ritrovare quale sarà stato il movimento della forcella cedente, per qualsivoglia moto della forcella movente. Così mentre questa allontanandosi dalla comune intersezione DD dei piani dei due

(1) Quando una figura contenuta in un piano si proietta sopra un altro piano inclinato al primo, le rette parallele alla comune intersezione dei due piani conservano nella proiezione la medesima lunghezza che avevano nel piano primitivo. Nel caso nostro essendo DD la comune intersezione dei due piani che contengono le circonferenze descritte dalle estremità dei rebbii conduttori e dalle estremità dei rebbii condotti, la retta $gk$ parallela a DD non ha sofferto nell'essere proiettata verun cangiamento, ed è per conseguenza eguale alla vera distanza dell'estremità del rebbio cedente dal piano EE dei due assi; ora, per passare alla distanza $kg$ oppure KG, questo punto dee aver descritto un arco di circolo EG.

circoli descriverà una intera circonferenza, anche l'altra farà un giro intero; anzi quando il movente avrà descritto uno, due, tre o quattro quadranti, anche il cedente allontanandosi dal piano degli assi avrà descritti similmente uno, due, tre o quattro quadranti; il suo moto tuttavia non sarà equabile, ma verrà accelerandosi nel primo quadrante, ritardandosi nel secondo, accelerandosi di nuovo nel terzo, e di nuovo ritardandosi nel quarto.

Per dare una idea di questo movimento, io supporrò che i due alberi A*a*, B*b* facciano un angolo di 135°, e noterò nella tavola che segue gli angoli descritti nello stesso tempo dalla forcella movente e dalla forcella cedente.

| movente | cedente |
|---|---|
| 0° | 0° |
| 15° | 10° 43′ 43″ |
| 30° | 22° 12′ 27″ |
| 45° | 35° 15′ 52″ |
| 60° | 50° 46′ 7″ |
| 75° | 69° 14′ 47″ |
| 80° | 75° 59′ 53″ |
| 85° | 82° 56′ 48″ |
| 90° | 90° 0′ 0″ |
| 95° | 97° 3′ 12″ |
| 100° | 104° 0′ 7″ |
| 105° | 110° 45′ 13″ |
| 120° | 129° 13′ 53″ |
| 135° | 144° 44′ 8″ |
| 150° | 157° 47′ 33″ |
| 165° | 169° 16′ 17″ |
| 180° | 180° 0′ 0″ |

Egli è appena bisogno di avvertire, che se l'asta movente invece di coincidere al principio del movimento con la intersezione DD del piano dei due circoli, partisse da un'altra posizione qualunque F'F' (*fig.* 13), e descrivesse l'angolo F'CF'', per determinare l'angolo G'CG'' descritto nello stesso tempo dell' asta cedente, basterebbe determinare successivamente con la costruzione testè insegnata le posizioni G'G', G''G'' del cedente, corrispondenti alle F'F', F''F'' del movente (1).

202. Quando i due alberi, tra i quali si dee trasmettere il movimento, non s'incontrano, sia che sieno paralleli, oppure che non si contengano nel medesimo piano, si può tuttavia

(1) Riduciamo in formola la costruzione del testo.

Sia $\varphi$ l'angolo DCF (*fig.* 12) descritto dal movente; $\psi$ l'angolo ECG descritto dal cedente; $\alpha$ l'angolo compreso tra i due assi; cosicchè, preso per unità il semi-diametro CD, sia $Ce = \cos\alpha$ il semi-asse minore della ellisse $DeDe$, e $Ck = CK\cos\alpha$ la proiezione della retta CK fatta nel piano della figura; avremo

$$kg = Ck \operatorname{tang}\varphi ,$$

$$KG = CK \operatorname{tang}\psi ,$$

ed a motivo di $kg = KG$

$$\operatorname{tang}\psi = \cos\alpha . \operatorname{tang}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Relazione mercè della quale facilmente si verificheranno le conchiusioni enunciate nel testo.

Se inizialmente l'asta movente faceva con la retta DD un angolo $\beta$, l'asta cedente faceva nell'istante medesimo l'angolo $\gamma$ tale che

$$\operatorname{tang}\gamma = \cos\alpha . \operatorname{tang}\beta .$$

Se poi a partire da queste posizioni le due aste hanno descritti gli angoli $\varphi'$ e $\psi'$, dovrà pure essere

$$\operatorname{tang}(\psi' + \gamma) = \operatorname{tang}(\varphi' + \beta)\cos\alpha ,$$

e quindi eliminando $\gamma$

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{\cos\alpha \left\{\operatorname{tang}(\varphi' + \beta) - \operatorname{tang}\beta\right\}}{1 + \cos^2\alpha \operatorname{tang}\beta . \operatorname{tang}(\varphi' + \beta)} .$$

trasmettere il moto dall'uno all'altro, impiegando due giunti universali in luogo di un solo. Condotta ad arbitrio una retta CC' che incontri entrambi gli alberi dati A*a*, D*d* (*figg.* 14 e 15) nei punti C, C', si disporrà tra i due primi un terzo albero B*b* secondo la direzione CC', il quale riceverà il movimento da A*a* e lo trasmetterà a D*d*. Si aggiunge talvolta questo terzo albero ancorchè le direzioni dei due primi A*a*, D*d* s'incontrino, al solo fine di rendere equabile la trasmissione del moto, la qual cosa con un giunto solo non è possibile. Supponiamo in primo luogo, che i due alberi A*a*, D*d* (*fig.* 14) sieno veramente in uno stesso piano: anche B*b* sarà per conseguenza nel piano medesimo, e potrà scegliersi in modo che faccia angoli eguali con A*a*, e con D*d*. Facciamo di più, che le due forcelle GBG, F'*b*F' fermate alle due estremità di quest'albero di mezzo B*b* sieno in uno stesso piano, cosicchè se all'origine del moto la GBG sarà nel piano che contiene i tre alberi, anche la F'*b*F' sarà in questo piano. Allora tutto essendo simile e similmente disposto nel primo giunto AB, e nel secondo giunto *b*D, l'albero di mezzo riceverà precisamente lo stesso movimento, sia che si prenda per movente il primo albero A*a* e gli si faccia fare una rotazione di un certo numero di gradi, sia che si prenda per movente il terzo albero *d*D e gli si faccia fare una rotazione eguale; viceversa adunque se si facesse fare una rotazione qualunque all'albero di mezzo B*b*, i due alberi estremi A*a*, D*d* ne riceverebbero movimenti eguali; dunque finalmente il movimento dell'albero condotto D*d* sarà sempre eguale a quello dell'albero conduttore A*a*, purchè, come abbiam detto, B*b* faccia angoli eguali con A*a*, D*d*, e le due forcelle GBG, F'*b*F' cadano in uno stesso piano.

Se poi il primo albero e il terzo non giacessero in uno stesso piano (*fig.* 15), si potrebbe tuttavia trasmettere il moto equabilmente da quello a questo, e converrebbe ancora perciò collocare l'asse di mezzo in modo che facesse angoli eguali con

$Aa$, $Dd$; ma le forcelle GG, F′F′ non vorrebbero più essere in un solo piano, ma bensì disposte in guisa, che quando la prima GG si trova nel piano che contiene i due alberi $Aa$, $Bb$, la F′F′ cadesse in quello che contiene in due alberi $Bb$, $Dd$ (1).

(1) Se i due assi dati (e per conseguenza anche quello di mezzo) giacciono nel medesimo piano, dicasi ancora $\alpha$ l'angolo di questi due assi, e siano $\delta$, $\delta'$ quelli che il primo asse fa col secondo, ed il secondo col terzo, epperò $\delta + \delta' = \alpha$; dicasi poi $\varepsilon$ l'angolo che comprendono tra di loro i piani delle due forcelle fermate ne' due capi dell'asse di mezzo.

Fingasi che inizialmente la prima forcella movente FAF sia nella linea d'intersezione dei due piani perpendicolari agli assi $Aa$, $Bb$, o in altri termini, che sia perpendicolare al piano dei tre assi; la prima forcella cedente GBG cadrà in quest'ultimo piano, e la seconda forcella movente $F'bF'$, solidaria con GBG sarà in un piano che farà con quello dei tre assi l'angolo $\varepsilon$ (che supporremo misurato camminando a ritroso del movimento), e per conseguenza farà l'angolo $90° - \varepsilon$ con la comune intersezione dei due piani perpendicolari al secondo asse $Bb$, ed al terzo $Dd$. Detti adunque $\varphi$, $\psi$ e $\theta$ gli angoli contemporaneamente descritti dai tre assi, avremo, in virtù delle formule della nota precedente

$$\operatorname{tang}\psi = \cos\delta \,.\, \operatorname{tang}\varphi\,;$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\cos\delta'\left(\operatorname{cotang}(\varepsilon-\psi) - \operatorname{cotang}\varepsilon\right)}{1 - \cos^2\delta \,.\, \operatorname{cotang}(\varepsilon-\psi)\operatorname{cotang}\varepsilon}\,;$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\cos\delta'\left(\operatorname{tang}\varepsilon - \operatorname{tang}(\varepsilon-\psi)\right)}{\operatorname{tang}\varepsilon\operatorname{tang}(\varepsilon-\psi) - \cos^2\delta}\,,$$

espressione la quale, facendovi $\varepsilon = o$, $\delta' = \delta$ diviene

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\delta} = \operatorname{tang}\varphi\,.$$

Se poi i tre assi non giacciono nel medesimo piano, detto $\lambda$ l'angolo che il piano $BC'D$ fa col piano $ACb$, e rimanendo ferme tutte le altre denominazioni, avrem sempre

$$\operatorname{tang}\psi = \cos\delta\operatorname{tang}\varphi\,;$$

il piano della seconda forcella movente $F'bF'$ facendo l'angolo $\varepsilon$ col

203. Vengo ora brevissimamente agli innesti mobili. AB (*tav.* 25, *fig.* 1) è un albero formato di due parti A, B collocate sul prolungamento l'una dell'altra, ma interamente separate e divise in C da un piccolo intervallo, cosicchè una di esse possa girare senza comunicare all' altra il suo movimento. All'estremità della parte A è fermata una ruota corona DD che gira con essa; sull'altra parte B dell'albero è infilzata e può scorrere innanzi e indietro un'altra ruota corona EE (perfettamente eguale a DD) la quale in qualunque posizione venga condotta non può mai girare senza comunicare il suo movimento all'albero medesimo, a cagione di due o più linguette sporgenti $bb$, $b'b'$ saldate sull'albero medesimo, e impegnate in due scanalature incavate nell'occhio della ruota; queste scanalature appaion pure nella *fig.* 2 del medesimo meccanismo veduto di prospetto.

Quando le due ruote DD, EE sono così lontane come la *fig.* 1 le rappresenta, il moto non si comunica tra le due parti dell'asse; ma se la ruota EE si spingerà da destra a sinistra, in modo che i suoi denti vengano ad incastrarsi fra quelli della ruota DD, allora il movimento si comunicherà. Per far avanzare così la ruota EE basta muovere la leva GOF, la quale gira intorno al centro O, ed è terminata inferiormente

piano AC$b$, farà l'angolo $90° - \lambda - \varepsilon$ con la perpendicolare al piano BC'D, ossia con la intersezione dei piani perpendicolari agli assi B$b$, D$d$; e quindi

$$\tang \theta = \frac{\cos \delta \left\{ \tang (\lambda + \varepsilon) - \tang (\lambda + \varepsilon - \psi) \right\}}{\tang (\lambda - \varepsilon) \tang (\lambda + \varepsilon - \psi) - \cos^2 \delta'} ;$$

epperò assumendo $\varepsilon = -\lambda$, e $\delta' = \delta$

$$\tang \theta = \frac{\tang \psi}{\cos \gamma} = \tang \varphi$$

come nel caso precedente. Queste formole giustificano dunque pienamente le conchiusioni prese nel testo.

in forma di forcella FF; poichè questa abbracciando la collana HH che fa corpo con la ruota EE, non può andar verso sinistra senza sospingere con sè la collana e la ruota, e stabilire la comunicazione del moto; nè retrocedere verso destra senza interromperla.

Questa specie d'innesto va però soggetta a due inconvenienti; il primo, che quando si spinge innanzi la ruota EE può avvenire che i suoi denti non imbocchino perfettamente in quelli di DD ma s'incontrino nelle loro punte; il secondo più grave ancora, che la parte B dell'albero e di tutti i meccanismi coi quali essa è unita passando tutto ad un tratto dal riposo al movimento, ne ricevano una scossa violenta che deteriori la macchina, e possa cagionare guasti e rotture. Si rimedia ad entrambi questi sconci, quando lo sforzo che si dee tramandare non è molto grande, sostituendo all'incastro di due ruote dentate il semplice fregamento di due coni (*fig.* 3), l'uno solido EE, scorrevole lungo l'albero conduttore A, l'altro DD vuoto e calettato saldamente sull'albero condotto B. Quando per via della forcella F il cono solido EE penetra nel cono vuoto DD e preme la sua parete interna, il fregamento scambievole delle loro superficie è bastante a stabilire la comunicazione del movimento; essa si interrompe ritirando il cono EE da destra a sinistra.

Lo stesso effetto si può ottenere altrimenti per via di attrito, con la disposizione della *fig.* 4. AB è come nelle figure precedenti un albero formato di due parti disposte in linea retta, ma interamente separate. A è la parte conduttrice di esso, dalla quale il movimento si trasmette al tamburo T per via della puleggia D e della coreggia GG. L'altra parte B dell'albero porta due puleggie; l'una D imbiettata sull'albero medesimo in guisa da non poter questa girare senza che giri esso pure; l'altra F *folle*, cioè liberamente girevole sull'asse nel quale è semplicemente infilzata. Una seconda coreggia HH inviluppata al medesimo tamburo T si può secondo il bisogno far passare sulla puleggia EE, la quale così comunicherà il moto all'albero B su cui è fermata; oppure sulla puleggia folle FF che girerà senza dare all'albero movimento nissuno.

204. Gli innesti mobili sono talvolta destinati non solamente ad interrompere la comunicazione del movimento, ma eziandio ad invertirne la direzione, facendo, per esempio, che una ruota che girava da destra a sinistra, prenda tutto in un tratto a girare da sinistra a destra, o viceversa. Sia R una ruota conica (*fig.* 5), la quale girando costantemente per lo stesso verso debba a piacimento comunicare all'albero BB′ due moti opposti. L'albero BB′ è tutto d'un pezzo, e porta infilate due ruote folli S, S′, che entrambe incastrano con R e girano per conseguenza per versi contrarii senza comunicare tuttavia nissun movimento al loro albero comune. HH è una calza o manica infilata nel medesimo albero, lungo il quale può scorrere liberamente, ma intorno al quale non può girare se non facendo girare l'albero pure, a motivo di due linguette, simili a quelle descritte parlando dell'innesto delle *figg.* 1 e 2. Le due estremità della calza sono armate di denti a sega EE, E′E′, per modo che facendola correre a sinistra, i denti EE vanno impegnarsi ne'denti eguali DD, scolpiti in rilievo sulla faccia della ruota S, ed allora il moto rotatorio si comunica da questa ruota alla calza, e dalla calza all'albero BB′. Ritirando la calza verso il mezzo dell'intervallo delle due ruote essa non riceverà verun movimento e l'albero BB′ starà fermo; ma conducendola verso destra, i suoi denti E′E′ s'impegneranno fra i denti D′D′ della ruota S′, e questa comunicherà così alla calza ed all'albero un moto di rotazione contrario a quello che gli veniva trasmesso dall'altra ruota S.

Questa maniera d'innesto va soggetta ai medesimi sconci, che abbiamo apposti a quello della *fig.* 1. Non così quest'altro: T (*fig.* 6) è un tamburo motore che porta due coreggie; una GG va invilupparsi secondo le tangenti esterne ad una puleggia folle infilzata sull'albero BB, e non comunica per conseguenza verun movimento a quest'albero; l'altra HH cinge secondo le tangenti interne la puleggia E' imbiettata sull'albero BB, e comunica così a quest'albero un moto rotatorio contrario a quello del tamburo T. Se ora con un artifizio qualunque, assai facile ad immaginare dopo tutto ciò che abbiamo detto, se ora, dico, la coreggia HH si farà passare sulla puleggia folle, cesserà ogni azione di questa correggia sull'albero BB; e se intanto l'altra coreggia GG si trasporterà sulla puleggia E imbiettata sull'albero BB, questo che prima girava a ritroso del tamburo T comincerà a girare nel medesimo verso di esso.

# CAPITOLO TRENTESIMO

## DEI NOTTOLINI, DEGLI ARRESTI E DEGLI SCAPPAMENTI.

205. Finora abbiamo considerate le varie maniere di meccanismi destinati a trasmettere il movimento, modificandolo nella sua direzione o nella sua velocità; diremo ora di alcuni congegni ordinati ad impedire, od a frenare il movimento.

Sovente nel trasformare un moto alternativo in moto continuo, il pezzo conduttore, dopo avere sospinto il pezzo condotto fino ad una certa distanza, lo abbandona per tornare indietro e riprenderlo in un altro punto per fargli far poi un altro passo innanzi. Ora nel tempo di questo ritorno del movente, il cedente potrebbe dare indietro per cagion delle forze che lo sollecitano, ed allora invece di un moto continuo esso avrebbe un moto alternativo, e lo scopo della macchina sarebbe fallito. Così per esempio, se la ruota di forza G (*tav.* 2, *fig.* 19) fosse destinata a muovere un verricello O inalberato sul suo asse, e mercè di questo a sollevare un peso P, mentre la leva AB verrebbe da $b$ in $b'$, l'azione del peso farebbe retrocedere il verricello e la ruota, e il peso stesso invece di sollevarsi con moto continuo, prenderebbe un moto alternativo di salita e di discesa. In questo ed in infiniti altri casi siffatti si rende impossibile il moto retrogrado del cedente per via di un semplicissimo ordigno detto *nottolino*, rappresentato in HI, e così disposto, che mentre esso per nulla non contrasta al moto diretto, efficacemente si oppone ad ogni moto di regresso. Esaminiamo quali condizioni sieno necessarie, acciò il nottolino goda di questa doppia proprietà.

Sia la ruota di forza A*mm'* (*tav.* 25, *fig.* 7), e cada sui suoi denti la punta *m* del nottolino B*m*, mobile intorno al centro B. Supponiamo che la ruota faccia sforzo per girare nel verso contrario a quello indicato dalla saetta S; il dente *m* premerà la punta del nottolino sforzandosi di farlo girare intorno al suo centro B, e la direzione di questa pressione, ossia la linea d'azione (come abbiamo veduto parlando in genere di meccanismi per contatto immediato) sarà quella della normale *mn* condotta nel punto di contatto del nottolino e del dente. Se poi la ruota si volesse far girare in direzione opposta, cioè secondo la saetta S, il dente allora premerebbe il nottolino secondo la normale *pr*, cioè sarebbe *pr* la linea d'azione. Ora se la normale *mn* incontra la linea dei centri AB in un punto compreso tra A e B, quando la ruota vorrà retrocedere essa e il nottolino saranno sospinti l'uno contro l'altro, ed ogni movimento resterà così vietato dal loro scambievole contrasto, cioè dalla loro incompressibilità. Ma se il centro B si trasportasse in un luogo tale, che la normale *mn* più non passasse tra i due centri, allora la pressione del dente invece di spingere la punta del nottolino verso il centro della ruota tenderebbe a scostarnelo; e siccome non vi ha nulla che resista a questo movimento, esso avrebbe luogo, il nottolino si solleverebbe e la ruota cesserebbe di essere ritenuta. Così appunto succede (restando il centro del nottolino in B), quando la ruota va al contrario della saetta, poichè la normale *pr* passa fuori dei due centri A, B.

Perchè adunque un nottolino faccia l'uffizio suo è necessario, che la direzione della pressione del dente contro il nottolino nel moto retrogrado della ruota passi tra i centri dei due pezzi; e che all'incontro la direzione di questa pressione nel moto diretto passi fuori dei due centri.

Al nottolino si dà qualche volta la forma di *uncino* o di *arpione*, come si vede in B'*m'*; allora perchè sia impedito il moto retrogrado, è necessaria la condizione inversa di quella testè enunciata, cioè la normale $m'n'$ dee passare fuori dei centri A, B, lasciandoli entrambi da una parte (1).

Le ruote a dente di sega non sono le sole, che possano essere ritenute da nottolini; ogni movimento retrogrado sarebbe efficacemente impedito dal nottolino B$m$ sia ch'esso operasse sopra una ruota a sprone, come nella *fig.* 8, sia che operasse sopra una ruota a caviglie, come nella *fig.* 9.

Non è sempre bisogno che il nottolino tolga affatto la possibilità del moto retrogrado; anzi basta molte volte ch'esso opponga qualche resistenza tanto a questo movimento, quanto al movimento diretto, acciocchè la ruota non vacilli ad ogni menoma scossa. Tali sono quelli segnati con le lettere C$m'$ nelle *figg.* 8, 9, 10, i quali, siccome è facile accertarsene mercè dell'enunziato criterio, non tolgono assolutamente nè il moto diretto, nè il moto retrogrado alla ruota cui sono rispettivamente applicati. La resistenza di questa specie di nottolini, che chiamerò *morsi* (2), si può accrescere facendoli premere contro la ruota da una molla K, come si vede nelle citate figure.

206. Quando col giro continuo e permanente di una ruota A (*fig.* 11) si vuol produrre in un'altra ruota B un moto intermittente, il mezzo più ovvio consiste nel sopprimere i denti della ruota conduttrice sopra una parte del suo perimetro, la qual parte dovrà essere tanto maggiore, quanto più lunghi debbono essere gl'intervalli di riposo della ruota

(1) Per chi ha cognizione degli elementi di Statica, sarà più chiaro il dire che la direzione della pressione del dente della ruota sul nottolino dee in ogni caso essere così diretta nel moto retrogrado, che essa possa risolversi in due forze le cui direzioni passino pei due centri, e sieno volte per tal verso che rimangano elise dalla incompressibilità o dalla inestensibilità della ruota e del nottolino.

(2) I Francesi li chiamano *sautoirs;* io ignoro qual nome dieno ad essi gli orologieri fiorentini: quello ch'io propongo mi par giustificato dalla forma e dall'ufficio di questi ordigni.

condotta. Questa disposizione però ha questo vizio che mentre la parte liscia del perimetro di A passa dirimpetto ai denti di B senza toccarli, questa seconda ruota, essendo libera affatto di prendere qualsivoglia movimento accidentale, può risultarne danneggiato l'effetto che s'intende di produrre, e può anche avvenire che al ritorno della parte dentata del conduttore il primo dente D di esso invece d'incontrarsi in un vano e di entrare a far incastro con esso, s'imbatta nella punta di un dente, onde la macchina si trovi così tutto a un tratto fuor di sesto, con pericolo anche di rottura. Al primo sconcio si ripara col frenare i movimenti della ruota condotta mercè di un *morso;* al secondo, fermando sul perimetro della ruota movente un po' innanzi del primo dente D, un braccio sporgente E, il quale nel girare della ruota venga aggrappare una caviglia F piantata sulla ruota condotta in posizione tale, che pel suo incontro col braccio E, i denti corrispondenti delle due ruote si trovino condotti ad imboccare esattamente ne' vani opposti.

Il meccanismo ora descritto si vede nella *fig.* 12 felicemente modificato, in guisa da fuggire ogni danno. La parte liscia del perimetro della ruota conduttrice è tagliata secondo una porzione di circonferenza di raggio maggiore del raggio primitivo della ruota stessa. La ruota condotta poi è intaccata sopra una parte FG della sua circonferenza, essendosene recisa una porzione secondo un arco concentrico alla ruota conduttrice, per modo che, nel tempo del riposo, la parte liscia della circonferenza di questa giri nella intaccatura della ruota condotta, senza punto toccarla. Segue da ciò che la ruota condotta nel tempo del riposo non può muoversi girando nè a destra nè a sinistra, poichè in questo giro le corna F, G dell'intaccatura verrebbero a dare nel perimetro della ruota conduttrice. Per esser certi poi che al ritorno dei denti di A, essi imbocchino drittamente nei vani di B, si aggiungon qui pure il braccio E e la caviglia F.

207. Con entrambi questi meccanismi, mentre il pezzo conduttore fa un giro, il pezzo condotto ha un periodo di movimento ed uno di riposo, e queste vicende possono ripetersi indefinitamente, non essendovi nulla che limiti il numero dei giri del conduttore. I meccanismi seguenti, conosciuti sotto il nome di *arresti*, hanno per oggetto di fare che il conduttore, dopo compiuto un certo determinato numero di giri, incontri un ostacolo che assolutamente gli vieti di proseguire il suo movimento. Gli orologieri fanno uso continuo degli arresti per limitare il numero de' giri che si posson dar con la chiave nel caricare l'orologio, ed evitare così che andando al di là del segno non si lacerino, o la molla maestra, o la catenella.

Il più semplice di tutti gli arresti è quello rappresentato nella *fig.* 13. Il pezzo conduttore A ha un solo dente o *dito* M; il pezzo condotto B ha tanti vani, quanti sono i giri che voglionsi permettere ad A. È chiaro infatti che ad ogni giro il dito M entrerà in uno dei vani di B, e che dopo ch'egli li avrà successivamente occupati tutti, ogni movimento riuscirà impossibile, venendo la punta di esso a percuotere contro la parte liscia del perimetro di B.

Assai più ingegnoso è l'arresto della *fig.* 14, tutto che sia un'applicazione del medesimo principio; la ruota condotta B ha cinque tacche quadrangolari ed equidistanti $p$, $p'$, $p''$, $p'''$, $p^{\text{IV}}$, nelle quali viene successivamente ad incastrarsi il dito D della ruota conduttrice; gl'intervalli compresi tra due tacche sono tutti, da uno in fuori $qq$, incavati in forma d'arco concentrico alla ruota A, per modo che questa può fare un giro quasi intero senza toccar la B, ma la B è sempre tenuta salda, in modo tutto simile a quello della *fig.* 12; l'intervallo $qq$ ha invece figura di arco convesso descritto dal centro B con raggio maggiore della distanza di questo centro dalla circonferenza di A, e non può mai per conseguenza venire a collocarsi fra i due centri.

Supponiamo ora, che nella posizione rappresentata nella figura la ruota A abbia già fatto un giro pel verso della saetta; il dito D, continuando il movimento, entrerà nella tacca $p'$, e sospingerà innanzi la ruota B per un quinto di giro, poi lascierà ad essa un tempo di riposo, e venendo ad incastrarsi nella tacca seguente $p''$ farà fare a B un altro quinto di giro; e così successivamente esso verrà ad incastrarsi nelle altre tacche $p'''$, $p^{\text{IV}}$; ma quando questa si troverà così condotta nel luogo dove ora sta la $p$, il moto non potrà più continuarsi, poichè, quando si volesse ancora mandar avanti la ruota conduttrice, la convessità dell'arco $qq$ verrebbe ad incontrare la circonferenza della ruota di A. Questa, per conseguenza, dopo aver fatti quattro giri si troverà insuperabilmente arrestata. I due incavi che si veggono di qua e di là del dito D sono necessari per lasciare libero giuoco alle corna della ruota B; la figura di questa ha fatto dare a tutto il congegno il nome di *Croce di Malta*.

Coloro, che avranno presente alla memoria ciò che abbiamo detto sul fine del capitolo decimonono intorno all'uso del *dente di cacciata*, comprenderanno facilmente il modo di operare dell'arresto della *fig.* 15. A e B sono due ruote nelle quali i numeri dei denti sono primi tra di loro. Sopra queste due ruote sono fermate due piastrette A$a$, B$b$, le quali sporgendo fino alla circonferenza che limita la lunghezza dei denti, coprono l'una un dente della ruota A, l'altra un vano della ruota B, onde è palese che questo dente e questo vano non potranno mai venire a fare incastro tra loro, ma tuttavia il dente $a$ potrà entrare in tutti i vani di B fuorchè in $b$, ed il vano $b$ potrà ricevere tutti i denti di A fuorchè $a$. Ora per essere i numeri dei denti delle due ruote numeri primi tra loro, il dente $a$ a ciascun giro entrerà in un nuovo vano della B, e non rientrerà una seconda volta in nissuno di essi, prima di avere occupati tutti gli altri; epperò la ruota A potrà fare liberamente tanti giri quanti sono i vani aperti di

B, e compiuti questi giri si troverà invincibilmente arrestata dall'incontro delle due piastre *a*, *b*.

208. Chiamansi *scappamenti* que' meccanismi ne' quali il pezzo conduttore ha moto continuo, e mena il pezzo condotto con moto alternativo, operando a vicenda sopra due punti differenti di esso: così i congegni delle *figg.* 5 e 9 della *tav.* 2, e quello della *fig.* 8, *tav.* 7 sono *scappamenti*, perchè in tutti e tre il movimento continuo dei bocciuoli conduttori si trasforma in movimento alternativo, venendo quelli ad operare a vicenda sopra due palette diverse, nelle due ultime figure citate, e sopra le due traverse orizontali del telaio FF nella prima.

Allo stesso genere appartiene pure il meccanismo disegnato nella *fig.* 16, *tav.* 25. Girando la ruota conduttrice A pel verso della saetta, una delle sue caviglie *n* ha condotto da *m* in *n* lo sprone Q della stanghetta CC′, alla quale essa ha fatto descrivere da sinistra a destra lo spazio *mn*; in questo medesimo istante la caviglia *p* incontra il braccio BD della squadra DBE, mobile intorno al punto B, e lo sospinge fino in *q*, nel qual movimento il braccio BE della squadra passa in BS, e premendo la caviglia *r* impiantata nella stanghetta, riconduce questa alla sua posizione primitiva, dalla quale essa viene tosto rimossa un'altra volta per l'incontro della caviglia *l*, nello sprone Q ritornato in *m*; e così con perpetua vicenda.

Gli scappamenti sono sopratutto importanti a considerarsi a cagione dell'uso che se ne fa per regolare il movimento degli orologi; ma la spiegazione di quest'uso, la quale per essere bene intesa esige molte cognizioni di meccanica, sarebbe mal collocata in un Trattato di Cinematica.

# CAPITOLO TRENTESIMOPRIMO

## DEI MOTI COMPLESSI.

209. Un corpo che nello stesso tempo riceve movimento da più cagioni, ciascuna delle quali operando sola gl'imprimerebbe una certa velocità secondo una certa direzione, prende una direzione ed una velocità diverse da quelle che gli sarebbero così separatamente impresse; il suo moto partecipa di tutti i movimenti *semplici* ch'esso riceve, e chiamasi per ciò *moto complesso* o *moto composto*.

I moti semplici si chiamano pure *moti componenti*, ed allora il moto composto prende il nome di *moto risultante*.

Se dunque vi sarà in un meccanismo un pezzo che riceva moto ad un tempo da due o da più altri pezzi, esso non seguirà la strada e non prenderà la velocità che gli competerebbero se ricevesse movimento da questo o da quel pezzo soltanto; noi ci proponiamo in questo capitolo di mostrare per via di alcuni esempli, come si possa determinare il moto complesso che risulta in esso dalla coesistenza di due o di più movimenti semplici, e come da questa composizione di due o più movimenti semplici si traggano comode soluzioni di molte quistioni di Cinematica applicata.

Fin dai primi capitoli abbiam dimostrata la legge, mercè della quale più movimenti impressi ad un punto materiale si compongono in un moto unico a quelli equivalenti; abbiam mostrato pure come un movimento qualunque di un corpo solido possa risolversi col pensiero in altri movimenti più semplici; epperò altro ora non ci rimane che di fare l'applicazione de' principii generali allora dimostrati ad esempli particolari opportunamente scelti.

210. Quando i moti semplici sono diretti secondo la medesima retta, gli uni per un verso, gli altri pel verso contrario, la direzione del moto composto si confonde con quella dei moti semplici, e la sua velocità è eguale alla somma delle velocità dirette da una parte, meno la somma di quelle dirette dalla parte opposta. Sia per primo esempio una spranga rigida AB (*fig.* 17) sostenuta nelle sue estremità da due cordoni AM, BN; sollevandosi questi in modo che l'estremità A sia trasportata in *a*, e l'estremità B in *b*, il punto di mezzo C della spranga riceverà nello stesso tempo due movimenti, che potranno senza error sensibile riguardarsi entrambi come rettilinei e verticali, purchè le altezze A*a*, B*b* siano piccole rispetto alla lunghezza AB della spranga; si domanda il moto composto, che ne risulterà nel punto C.

Se l'estremità A fosse sola sollevata in *a*, e l'altro termine B stesse fermo, è manifesto pei triangoli simili A*a*B, C*c*B che il punto di mezzo C sarebbe portato ad una altezza C*c* metà di A*a*; e similmente se stesse fermo il termine A, ed il termine B si innalzasse in *b*, il punto C salirebbe in *c'* percorrendo lo spazio C*c'* eguale alla metà di B*b*. Ora, se i due termini A, B si solleveranno insieme l'uno in *a*, l'altro in *b*, il punto C prenderà un moto eguale alla somma dei due moti semplici ch'esso avrebbe separatamente ricevuti, cioè esso verrà in E percorrendo lo spazio CE eguale a C*c* più C*c'*, cioè eguale alla metà della somma di A*a* e di B*b*.

Se poi mentre uno dei termini A s'innalza, l'altro B si abbassasse, i due movimenti semplici del punto C sarebbero opposti, ed il moto complesso che ne risulterebbe sarebbe eguale non più alla loro somma, ma bensì alla loro differenza.

Se il cordone che tira il termine B (*fig.* 18) fosse attaccato al punto di mezzo F di una seconda spranga BE tirata essa pure da due cordoni DN, EO, sollevandosi ad un tempo i tre cordoni AM, DN, EO, il punto C riceverebbe tre movimenti semplici, e poichè il moto del punto F sarebbe eguale alla semi-somma di quelli di D, E, il moto di C riuscirebbe eguale alla metà del moto di A, più la quarta parte dei movimenti di D, E. Se alcuno de' punti A, D, E si abbassasse invece di alzarsi, il suo moto invece di sommarsi andrebbe sottratto dagli altri.

Queste osservazioni semplicissime danno la spiegazione di ciò che succede nell'uso delle puleggie o carrucole mobili sostenute da cordoni tutti tra loro paralleli; la carrucola CB (*tav.* 3, *fig.* 8) essendo accavalciata alla fune ABCF, il suo diametro orizontale BC si trova nel medesimo caso della spranga AB del primo esempio; e sollevandosi i due tratti della fune, il centro della girella si solleva ad una altezza eguale alla semi-somma degli spazii descritti da questi due tratti. Il lettore farà facilmente l'applicazione dello stesso principio ai sistemi di carrucole rappresentati nelle *figg.* 9 e 10 della stessa *tav.* 3.

Se il punto C (*tav.* 25, *fig.* 17) non fosse nel mezzo della retta AB, ragionando in modo analogo a quello tenuto testè, si vedrà tosto che supponendo per un istante immobile il punto B, la elevazione di C sarebbe $\frac{Aa \times BC}{AB}$; e supponendo immobile il punto A, essa sarebbe $\frac{Bb \times AC}{AB}$; epperò la elevazione totale di C quando i due moti hanno luogo insieme sarà la somma di queste elevazioni parziali, cioè

$$\frac{Aa \times BC + Bb \times AC}{AB}.$$

211. La *fig.* 19, *tav.* 25 rappresenta una macchina conosciuta sotto il nome di *verricello chinese;* è un verricello il cui subbio è formato di due cilindri solidarii DE, FG di diametri differenti, mobili sul medesimo asse; la fune MABN che sostiene la carrucola mobile ACB, è legata ne' suoi due capi alle due parti del subbio, per modo che girando questo, uno dei tratti MA si raccoglie sul cilindro maggiore DE, mentre l'altro tratto NB si sviluppa dal cilindro minore FG. Così mentre il punto

A si solleva, il punto B si abbassa, e il movimento del centro C della carrucola è eguale alla semi-differenza di questi due movimenti, e per conseguenza ad ogni giro di subbio il peso P vien sollevato ad un'altezza eguale alla semi-differenza delle circonferenze dei due cilindri.

La stessa cosa avviene col verricello conico della *fig.* 20 e lo stesso pure a un dipresso con un verricello il cui profilo fosse una curva qualunque concava o convessa come nella *fig.* 21; ma in quest'ultimo caso di mano in mano che la corda verrebbe sviluppandosi da una parte ed inviluppandosi dall'altra, varierebbe la differenza delle circonferenze e la velocità con cui sarebbe sollevato il peso.

Il meccanismo conosciuto sotto il nome di vite differenziale ci darà un altro esempio della composizione di due movimenti semplici diretti secondo la medesima linea; AD (*fig.* 22) è un cilindro sul quale sono scolpite due viti AB, CD differenti di passo, e volte dalla medesima parte. La chiocciola F, in cui è impegnata la vite di passo maggiore CD, è fissa; l'altra E, in cui gira la vite AB, può muoversi innanzi e indietro tra le due guide GI, GI, ma non può girare intorno all'asse della vite. Facciasi dare un giro al cilindro; la vite CD s'avanzerà nella sua chiocciola, di una quantità eguale al proprio passo, e trascinerà nel moto anche la vite BA e la sua chiocciola E; ma intanto questa chiocciola si sarà mossa sulla sua vite in direzione contraria di una quantità eguale al passo di questa; epperò in complesso, la chiocciola E si sarà avanzata di un passo della vite CD, ed avrà retroceduto di un passo della vite AB, epperò si sarà avanzata assolutamente di una quantità eguale alla differenza dei due passi. La vite differenziale può tornar utile per produrre un moto progressivo regolare e lentissimo; infatti unendo due viti il cui passo differisca di un centesimo di millimetro per esempio, si avrà lo stesso movimento che si avrebbe impiegando una vite semplice di passo eguale a questa differenza: ma questa ultima vite sarebbe impossibile a farsi, e la vite differenziale sopperirà a questa impossibilità.

Se le due viti AB, CD avessero le loro eliche volte in parti contrarie, ad ogni giro del cilindro la chiocciola E percorrerebbe uno spazio eguale alla somma dei due passi.

Si può ancora con una vite semplice di qualsivoglia passo ottenere un effetto eguale a quello della vite differenziale, purchè s'imprimano nello stesso tempo due moti rotatorii disuguali alla vite ed alla sua chiocciola. Sia DD (*fig.* 23) una vite la cui testa porti una ruota dentata BB ed FF la sua chiocciola, la quale pure porti una ruota dentata EE; la vite sia libera non solamente di girare intorno al proprio asse, ma ancora di salire e di discendere, ma la chiocciola sia contenuta in un anello GG che le permetta bensì il moto rotatorio, ma la impedisca da ogni moto progressivo: sia finalmente OO un albero parallelo all'asse della vite ed armato di una ruota CC che faccia incastro con quella EE della chiocciola, e di un rocchetto AA le cui ali s'incastrino ne' denti della ruota BB della vite, e che sia tanto lungo che la ruota possa salire e discendere insieme con la vite senza che cessino i suoi denti d'imboccare con quelli del rocchetto. Fingiamo, per fissare le idee, che il rocchetto abbia sei ali, la ruota CC dodici denti, la EE ventiquattro e la BB trentasei. Allora girando il manubrio MO, quando si saranno dati sei giri, la ruota BB e la vite DD avranno fatto un giro, e la chiocciola ne avrà fatti tre; e quindi, secondo che la rotazione sarà stata diretta a destra od a sinistra, la vite si sarà alzata od abbassata di due passi. Per render più manifesto il gioco della macchina io ho assunti per le quattro ruote A, C, B, E dei numeri dei denti tali, che le rotazioni della vite e della chiocciola ne sono risultate molto disuguali; ma se si supponesse, per esempio, che A e C avessero lo stesso numero di denti come a dire dieci, e che avendo B 100 denti, E ne avesse 99, sarebbe facile di scorgere che

990 giri dell'albero OO ne farebber fare 99 alla BB ed alla vite, e 100 alla ruota CC ed alla chiocciola, onde quella si solleverebbe all'altezza di un passo; epperò ad ogni giro di manubrio il moto della vite sarebbe di un 1|990$^{mo}$ di passo.

212. Finquì abbiamo considerata la composizione dei moti rettilinei; nello stesso modo possiamo comporre tra loro per via di somma o di differenza due moti rotatorii che si facciano intorno al medesimo asse, od intorno ad assi paralleli, come avviene tutte le volte che in un meccanismo vi ha una o più ruote le quali girino intorno ad assi, i quali intanto si muovan essi medesimi in giro intorno a qualche altro asse; questi meccanismi, che designeremo col nome di *rotismi circolanti*, sono stati con somma diligenza sottoposti a calcolo dal sig. Willis; noi ci limiteremo ad indicarne pochi esempli semplicissimi.

Sieno ACA', DD'D'' (*tav.* 26, *fig.* 1) due ruote dentate concentriche, la prima a sprone, la seconda annulare; sia poi BOB' una terza ruota dentata, che abbia per diametro primitivo la differenza dei raggi primitivi delle due prime, e che faccia incastro con entrambe. Supponiamo per ora che la ruota annulare DD'D'' sia fissa, cioè non possa girare intorno al centro C; allora se si farà girare la ruota centrale AA', essa farà pur girare la BB' intorno al suo proprio centro O, ma intanto questo centro O si muoverà intorno al centro fisso C, descrivendo la circonferenza del circolo $oOO'$; epperò questa ruota BB' potrà con giustezza chiamarsi *ruota circolante* o *ruota epicicliea*. Sia dunque il centro O venuto da $o$ in O, sviluppandosi la circonferenza della ruota circolante BB' sull'arco DN della ruota fissa e sull'arco AM della ruota centrale. Questi due archi essendo disuguali, i due sviluppi non potrebbero essersi fatti senza scorrimento, se intanto la ruota centrale non avesse girato intorno al proprio centro pel verso contrario a quello del movimento di O e di una quantità A$m$, eguale alla differenza dei due archi DN ed AM. L'arco poi descritto dalla ruota circolante intorno al proprio centro è manifestamente eguale all'arco fisso DN, sul quale la sua circonferenza si è sviluppata. Quando adunque il centro mobile O avrà fatto tutto il giro da destra a sinistra intorno a C e sarà tornato in *o*, la ruota centrale avrà descritto da sinistra a destra un arco eguale alla differenza delle due circonferenze DD′D″ e AA′. Così per esempio, se la ruota annulare avrà 45 denti, la ruota circolante 13 e la ruota centrale 19, quando il centro mobile O avrà compiuto il suo giro intorno a C, la ruota centrale avrà rinculato di 26 denti (essendo 26 la differenza tra 45 e 19), cioè avrà fatto un giro intero, più $\frac{7}{19}$ di giri, e la ruota circolante avrà fatti due giri interi intorno al proprio centro O.

Se si volesse che la ruota centrale fosse fissa, e che la ruota annulare potesse girare intorno a C, lo stesso ragionamento farebbe comprendere, che, mentre il centro della ruota circolante farebbe un giro intero sulla circonferenza *o*OO′ andando da destra a sinistra, la ruota annulare si avanzerebbe per lo stesso verso di un arco eguale alla differenza delle due circonferenze DD′D″ ed AA′, e la ruota circolante BB′ avanzerebbe girando intorno al proprio centro di un arco eguale alla circonferenza della ruota fissa AA′, su cui essa si viene sviluppando. Così dunque con gli assunti numeri di denti la ruota annulare avanzerebbe di 26 denti (differenza tra 45 e 19), e la ruota circolante di 19 denti, cioè farebbe un giro e $\frac{6}{15}$ intorno al proprio centro.

Questo meccanismo è suscettivo di parecchie modificazioni facili a comprendersi senza il sussidio di altre figure, e de' cui effetti il lettore potrà senza pena render conto a se stesso; infatti

1° Alla ruota circolante unica BB′ potrà sostituirsi un sistema di due ruote solidarie diseguali, ossia di una ruota e di un rocchetto de' quali l'uno faccia incastro con la ruota annulare, l'altra con la ruota centrale.

2° Alla ruota annulare DD'D'' potrà pure sostituirsi una ruota a sprone; allora la ruota circolante BB' sarà esterna, il suo albero dovrà esser portato da un braccio girevole intorno al centro C, e sul prolungamento del braccio medesimo sarà pure inalberata una terza ruota che riceverà il movimento dalla BB'.

3° Alle ruote piane, che si sono finquì considerate, potranno sostituirsi altrettante ruote coniche. Così nella *fig.* 5 della *tav.* 25, tolte via le quattro ruote corone D, D', E, E', se si finge che la ruota S sia immobile, e che l'albero A della ruota R sia libero di prendere intorno all'albero BB' ed in un piano ad esso perpendicolare tutte le posizioni possibili, si scorgerà che facendo girare la ruota S' essa communicherà alla R un moto rotatorio intorno all'asse mobile A, ed un moto circolatorio intorno all'asse fisso BB'.

213. Come secondo esempio di rotismi circolanti prendiamo a considerare il meccanismo della *fig.* 2. La bilancia od *altaleno* AB oscilla intorno al suo centro A; ed è articolata in B col tirante BO (o *nerbò* o *biella* che voglia chiamarsi (1)), alla cui estremità O è fissata una ruota dentata che non può girare intorno al suo centro, ma che nel movimento della bilancia e del tirante viene trasportata in giro intorno alla ruota C con cui fa incastro, essendo le cose disposte in modo che il centro mobile O non possa mai allontanarsi dal centro

(1) La solita ignoranza del vocabolo proprio. I Francessi dicono *bielle* questi tiranti, che trasmettono il moto da una bilancia ad una manovella o, viceversa. Molti Ingegneri italiani dicono senza scrupolo *biella;* vocabolo a vero dire di buon suono, ma che ha il difetto di essere pure nome di una città. Per analogia, anzi per identità di uffizii tra questi *tiranti*, e la corda, che nella mola dell'arrotino, secondo la testimonianza autorevolissima del sig. cav. Carena, chiamasi in Toscana nervo, io propongo in tutta umiltà la denominazione di *nerbo*.

fisso C, ma solo circolare intorno ad esso. Quest'ultima ruota C poi è fermata sull'albero della grande ruota o volante VVV. La ruota O dunque comunica il moto alla C e per mezzo di essa al volante, e si vuol saper quanti giri farà quest'ultimo, mentre il centro O darà una volta intorno a C.

Si noti che, mentre il centro O e la linea mobile CO dei centri fanno un giro intorno a C, tutta la circonferenza di O si sviluppa sulla circonferenza di C, cioè passano per la linea mobile dei centri CO tutti i denti della ruota O, ed altrettanti della ruota C; di più questa fa un giro intero precisamente come se fosse unita all'estremità O del tirante da un braccio CO; dunque in tutto la ruota centrale farà un giro intero, più tanta parte di giro quanta ne occupa sulla sua circonferenza un numero di denti eguale a quello della ruota circolante; così mentre O compie una sola rivoluzione,

Se le due ruote sono eguali, C farà due giri,

Se C ha due volte più denti che O, essa farà un giro e mezzo,

Se C ha metà meno denti che O, essa farà tre giri,

Se C non ha che i due terzi dei denti di O, essa farà due giri e mezzo,

Se C ha una volta e mezzo i denti di O, essa farà un giro e due terzi,

ecc. ecc. ecc.

Questo meccanismo immaginato da Watt (1) e da lui sostituito all'altro più semplice della manovella (di cui un agente infedele gli aveva involata la proprietà, assicurandone l'uso a se stesso per via di un privilegio) questo meccanismo, dico, ha ricevuto dall'inventore stesso il nome di *ruota planetaria* (2), per una certa analogia de' movimenti della ruota

(1) Giacomo Watt, nato a Greenock nel 1736, morto ad Heathfield presso Birmingham nel 1819. Egli vivrà perpetuamente nella gratitudine degli uomini di cui, col perfezionamento della macchina a vapore, egli ha tanto accresciuta la potenza.

(2) Propriamente *Ruote a sole e pianeta* (*Sun and planet wheels*).

circolante intorno alla ruota centrale con quello dei pianeti intorno al sole. Esso è ora andato in disuso.

214. Io porrò qui, per non saper ove locarla in sede migliore, la descrizione del *conta-passi* di Breguet, che ci somministrerà un bello esempio di moto relativo o *differenziale* di rivoluzione. Questo meccanismo può valere egualmente pei *noveratori* destinati ad indicare il numero delle corse di una macchina qualunque, per esempio dello stantuffo di una tromba idraulica, o dei pestelli dei mulini da riso, da polvere e simili.

La stanghetta AB (*tav.* 26, *fig.* 13), mobile pel verso della lunghezza, può per via di un cordoncino *a*X, annodato alla campanella *a*, attaccarsi all'organo meccanico di cui si vogliion noverare le corse; quando la stanghetta, dopo essere stata tirata in giù, viene abbandonata a se stessa, la reazione di una molla elicoidale GH tosto la riconduce nella sua prima posizione. Sull'estremità superiore B della stanghetta medesima è impernata una leva a squadra CBD, il cui braccio verticale BC appoggiandosi contro la caviglia C non può mai girare verso destra, ma può bensì inclinarsi verso sinistra vincendo la resistenza di una molla dolcissima EF. Il braccio orizzontale BD di questa leva medesima, quando la stanghetta vien tirata all'ingiù, aggrappa a modo di arpione uno dei denti della ruota a sega I, e la fa avanzare di un passo; ma quando la stanghetta risale, il morso UV tien salda la ruota I, e l'arpione BD piega all'ingiù superando la resistenza della molla EF, ed oltrepassando la ruota ritorna nella sua prima posizione.

Sull'albero medesimo della ruota I e solidariamente con essa gira un rocchetto L che ha tante ali, quanti sono i denti della ruota I, e che per conseguenza si avanza esso pure di un passo ad ogni doppia corsa della stanghetta; il qual rocchetto imbocca in K con due ruote eguali portate dal medesimo albero O, anzi, per dir meglio, da una *calza* infilzata su quest'albero che rimane immobile; di queste ruote una sola è visibile nella figura, e ricopre esattamente l'altra sua compagna, la quale avendo cento denti, fa un giro intiero ad ogni cento corse della stanghetta, ed essendo saldamente fermata sulla calza, che porta lo stilo o lancetta OS, fa sì che questa lancetta segni il numero delle corse sul lembo dello strumento, di cui non si è conservata sulla figura che una piccola porzione ZZ. Così combinato il noveratore non potrebbe indicare oltre a cento corse; ma ad accrescere questo numero fino a 10100 serve appunto la ruota superiore MM'M'', di cui non abbiamo ancora spiegato il gioco. Essa è *folle* sulla calza della ruota inferiore, cioè può girare con velocità angolare propria e differente da quella della ruota inferiore. La sua circonferenza è divisa in cento e un denti, i quali per essere di passo sensibilmente eguale a quello dell'altra ruota e del rocchetto L, imboccano con questo per modo, che mentre la ruota inferiore fa un giro intiero, questa (dico la ruota superiore) fa un giro meno un passo, e resta per conseguenza di un passo indietro dalla prima. Se ho saputo bene spiegarmi, il lettore comprenderà facilmente, che segnando sul lembo della ruota superiore una divisione in cento e una parti eguali, corrispondenti ai cento e un denti di essa ruota, la lancetta T che fa parte dello stilo OS, ad ogni giro intero della ruota inferiore si avanzerà di una divisione sul lembo della ruota MM, e così lo stilo medesimo indicherà con la lancetta T le centinaia di corse, e con la lancetta S l'eccesso del numero totale delle corse sulle centinaia indicate dalla lancetta T; così se questa segnasse 32, e la S segnasse 83, il numero totale delle corse sarebbe stato di 3283.

215. Veniamo ora alla composizione de' movimenti, le cui direzioni non coincidono. I nostri lettori non hanno dimenticato che quando un punto A (*tav.* 1, *fig.* 3) riceve insieme due moti, i quali nell'unità di tempo lo porterebbero uno in B, l'altro in C, esso non andrà nè in questo, nè in quel luogo, ma

bensì in D, descrivendo in quel tempo la diagonale AD del parallelogramma costrutto sulle linee AC, AB come lati. Si ricorderanno similmente che quando ad un punto A (*tav.* 1, *fig.* 4) s'imprimono nello stesso tempo più velocità rappresentate in direzione e in grandezza dalle rette AB, AC, AD, AE, AF, se si fa un poligono AB*cdef*, i cui lati sieno rispettivamente eguali e paralleli alle velocità date, la retta A*f* che chiude il poligono esprimerà la direzione e la velocità del moto composto di A.

Segue da ciò, che se congegneremo un meccanismo tale, che un punto dato riceva da esso due o più movimenti, ci sarà facile in ciascuno istante determinare la direzione e la velocità del moto complesso che questo punto prenderà, purchè sappiamo quali sieno in quell'istante le velocità e le direzioni dei movimenti semplici ch'esso riceve. Segue ancora, che se questi moti semplici sono tutti equabili, e si fanno sempre secondo le medesime direzioni, il moto complesso sarà pure equabile, e sempre diretto secondo la medesima linea retta; ma se alcuno de' movimenti semplici verrà continuamente variando velocità o direzione, anche il moto complesso varierà continuamente velocità e direzione, cioè sarà moto vario e curvilineo. Segue finalmente, che se vogliamo che un punto M (*tav.* 26, *fig.* 3) descriva nel suo movimento una curva data qualunque AMB, basterà che imprimiamo a questo punto due moti semplici MC, MF tali che ad ogni istante costruendo il parallelogramma MFCG sulle linee MC, MF che rappresentano le velocità e le direzioni di questi movimenti, la diagonale MG si confonda con la tangente alla curva data. Si potrà pure per lo stesso fine impiegare più di due moti semplici, purchè (*fig.* 4) si confonda con la tangente della curva voluta la linea M*f* che chiude il poligono MC*ef* costrutto con lati eguali e paralleli alla velocità MC, ME, MF dei moti semplici impressi nel punto descrivente M.

Generalmente però s'impiegano due soli moti semplici diretti secondo linee tra loro perpendicolari; se, per esempio, un lato di una squadra si farà scorrere lunghesso il filo di una riga immobile, ed intanto la punta di una matita si farà pur correre lungo il filo del lato della squadra che è perpendicolare alla riga, la matita descriverà sulla carta una curva, la cui figura dipenderà dalla legge con cui saranno venute variando le velocità della squadra lungo la riga, e della matita lungo la squadra.

Fingasi per esempio, che un filo di lunghezza AG*a* (*fig.* 5) eguale alla lunghezza del lato GH della squadra sia legato da una parte all'uncinetto fisso A, e ripiegandosi sulla girella G mobile con la squadra, vada attaccarsi in *a* ad un *cursore* od anello mobile CM, il quale porti in M la matita. Mentre la squadra scorrerà da sinistra verso destra lungo la riga AB, il filo farà discendere d'altrettanto il cursore e la matita lungo il lato HG, onde la matita sarà animata da due moti eguali diretti uno parallelamente ad AB, l'altro secondo HG; la sua punta descriverà dunque la diagonale di un quadrato, cioè la retta SR, inclinata a 45° sulla AB. L'inclinazione della retta SR sulla AB sarebbe maggiore o minore dell' angolo semiretto, se la velocità propria della matita lungo HG fosse maggiore o minore di quella della squadra lungo AB.

Ma se i due moti semplici, cioè quelli della squadra e della matita, non saranno più equabili entrambi, la linea descritta sarà curva. Sia sempre AB (*fig.* 6) una riga fissa, e sia GHI una squadra che scorra col suo lato GI lungo il filo inferiore di essa riga. Nel punto O il braccio KH della squadra sia attraversato dall'asse di una ruota F*o*F', dentata o non dentata, di raggio tale che la sua circonferenza appoggiandosi sul filo superiore della riga si sviluppi sovra di esso quando la squadra si fa muovere innanzi o indietro. L'asse della ruota FF' porti pure una piastra eccentrica MLN di qualsivoglia figura, la quale girerà con la ruota, e spingerà col suo contorno una matita M disposta in modo, che possa scorrere su e giù per una feritoia HM aperta nel braccio KH della squadra; è manifesto che muovendosi questa da destra a sinistra, la ruota FF e l'eccentrico MLN gireranno pure da destra a sinistra, e la matita animata da due movimenti l'uno parallelo ad AB, l'altro secondo MH, descriverà una curva RMS, la cui figura dipenderà da quella dell'eccentrico e dalla grandezza del raggio della ruota FF.

216. Ho detto che si compongono generalmente due moti perpendicolari tra di loro; nulla però vieterebbe d'impiegare una squadra zoppa, i cui due bracci facessero tra loro un angolo comunque differente dal retto, costante od anche variabile.

La *fig.* 7 mostra una disposizione di parti, per cui il punto M sarebbe animato da due velocità, la cui inclinazione scambievole andrebbe continuamente variando. Una grande ruota, di cui non si vede in figura che una parte AB, girando intorno al suo centro, comunica il movimento alle due ruote eguali o disuguali AA′, BB′. Gli alberi di queste portano due rocchetti o fusi C, C′, le cui basi sono due curve chiuse qualunque, ma convesse su tutto il loro contorno. Due fili annodati insieme nel punto descrivente M vengono avvolgersi su questi due rocchetti, onde esso si trova continuamente tirato con velocità variabili, secondo le direzioni parimenti variabili MC, MC′, e descrive una curva RMS di cui si potrebbe determinare la figura, quando si conoscessero i raggi delle due ruote AA′, BB′, la figura e la posizione iniziale di ciascheduna delle curve C, C′ che servono di base ai due rocchetti. Il filo MP non fa altro uffizio che quello di mantener sempre tesi, per l'azione del peso P, i due tratti CM, C′M.

217. Invece di combinare due moti rettilinei, come abbiam fatto in tutti gli esempi addotti finora, si posson comporre ancora un moto rettilineo ed uno curvilineo, oppure due moti curvilinei. Sia AB (*fig.* 8) una riga che giri intorno al centro

O, e sia in O un rocchetto immobile, sul quale, girando la riga, venga invilupparsi il filo FAM, il quale tiri così verso A il cursore e la matita M. Questa sarà animata insieme da un moto di rotazione intorno al punto O, e da un moto progressivo secondo il raggio MO; e siccome questi due moti saranno entrambi equabili, la curva descritta MSR sarà una spirale d'Archimede di passo eguale alla circonferenza del rocchetto O. Si otterrebbero altre curve sostituendo al rocchetto circolare altri rocchetti che avesser per basi delle curve differenti dal circolo.

Dalla combinazione di due movimenti, l'uno progressivo, l'altro rotatorio, risulta pure il modo di operare dello strumento detto *pantografo* o *scimia*; e destinato a ricopiare qualsivoglia disegno in iscala maggiore o minore dell'originale; cioè a descrivere una figura simile ad una figura data, e di lati maggiori o minori in una ragione pur data. Con quattro righe rettilinee AB, AC, DE, D*e* (*fig.* 9) unite a snodo ne'punti A, B, C, D formasi il parallelogramma articolato ABDC, di cui due lati contigui DB, DC si prolungano in E, *e*, tanto che siano BE = DC, e C*e* = DB. Ciò posto, se il punto A si mantiene immobile, comunque si apra o si chiuda l'angolo in D, e comunque si faccia girare lo strumento intorno ad A, sempre i tre punti E, A, *e* si disporranno secondo una linea retta che passerà per A; e le distanze AE, A*e* staranno sempre tra di loro come AB all'AC. Infatti, per la proprietà delle rette parallele DE, CA, e D*e*, BA i due triangoli isosceli EBA, AC*e* saranno sempre simili tra di loro, e la somma de' tre angoli EAB, BAC, CA*e* sarà sempre eguale a due retti.

Quindi rimanendo sempre immobile il punto A, e supponendo fermato in E e alla riga DE uno stilo o *calcatoio*, la cui punta si faccia muovere secondo qualsivoglia linea retta o curva GEFH, avverrà di necessità che una matita od altro *segnatoio* qualunque fermato in *e* alla riga D*e* descriverà con la sua punta la linea *gefh*, simile alla GEFH, e le cui dimensioni staranno alle dimensioni omologhe di questa, come AC : AB; essendo manifesto che, mentre il calcatoio E percorre il latercolo qualunque EF, il segnatoio *e* dovrà percorrere il latercolo *ef* talchè i due angoli EAF, *e*A*f* sieno eguali tra di loro, e i quattro lati EA, AF, *e*A, A*f* tra loro proporzionali, epperò sarà *ef* parallelo e proporzionale ad EF; la qual cosa verificandosi per tutti i latercoli, di cui si compongono le due linee GH, *gh*, queste riusciranno simili tra di loro.

In altri modi ancòra può impiegarsi il *pantografo*, collocando il pernio fisso in E, il calcatoio in A ed il segnatoio in *e*, nel qual caso la figura descritta da quest'ultimo sarà maggiore di quella percorsa dal calcatoio, nella ragione di DE; AB; oppure collocando sempre in E il pernio fisso, il calcatoio in *e* ed il segnatoio in A, nel qual caso si otterrà una figura minore della figura data, nella ragione di AB : DE.

218. Al medesimo principio della composizione di un moto progressivo con un moto giratorio, può ancora riferirsi la spiegazione degli effetti dello strumento recentemente immaginato da Ernst per la misura meccanica delle aree piane, e detto perciò *planimetro*. Il lettore avrà presente, che nel capitolo decimoquinto, § 105, abbiam fatto osservare, come una rotella $r'R'$, mobile intorno al suo asse $D'd'$ (*tav.* 8, *fig.* 18), tangente in $r'$ alla superficie di un cono circolare $CBC'$, e posta in un piano perpendicolare al lato CB del cono medesimo, riceverà da esso per contatto di sviluppo un moto rotatorio equabile, quando il cono si farà girare equabilmente intorno al proprio asse AB; e che la velocità angolare della rotella, starà a quella del cono, come il diametro $r'i'$ della sezione retta del cono fatta per $r'$, starà a quello della rotella: onde abbiam potuto concludere, che collocando successivamente questa rotella a diverse distanze dal vertice B del cono, le velocità angolari ch'essa riceverà saranno pro-

porzionali alle distanze medesime. Da queste premesse noi possiamo concludere ancora, che il numero dei giri fatti in qualsivoglia tempo dalla rotella $r'R$ sarà in ragion composta della distanza $Br'$ e del numero dei giri contemporaneamente fatti dal cono; od ancora che il numero dei giri fatti dalla rotella sarà proporzionale all'area di un rettangolo che abbia per base l'arco percorso da un punto della circonferenza della base del cono, e per altezza la distanza $r'B$ del piano della rotella dal vertice del cono medesimo.

Immaginisi adunque un piano o carretto ABB′A′ (*fig.* 15) scorrevole lungo le guide fisse GG′, HH′; e porti seco questo carretto un cono circolare tronco CDD′C′, il cui asse sostenuto da guancialetti fermati alle due estremità del carretto, sia così disposto, che la generatrice superiore del cono sia orizzontale e press'a poco nel medesimo piano della faccia superiore del carretto, e che la circonferenza CC′ della base tocchi il piano orizzontale della tavola, sulla quale riposano le guide GG′, HH′. Facendo scorrere il carretto parallelamente a se stesso, il cono riceverà per contatto di sviluppo un moto rotatorio, per cui ciascun punto della circonferenza della sua base percorrerà archi eguali agli spazi descritti dal carretto. Lunghesso il lato AB di questo, e per conseguenza perpendicolarmente alle guide, sia disposta una lunga riga NN′, mantenuta dalle rotelle $r, r, r, r$, le quali le permettano di scorrere innanzi e indietro pel verso della sua lunghezza, onde sì pel movimento del carretto, e sì per quello proprio della riga sia sempre possibile far percorrere alla punta di un *calcatoio* fermato all'estremità N di questa, il perimetro LNMQ di una figura chiusa qualunque segnata sul piano della tavola. Finalmente concepiamo che la riga mobile NN′ porti con seco due bracci $Ff$, $F'f'$, i quali sostengano i due perni dell'albero orizzontale, di una rotella circolare R, la quale appoggiandosi con la sua costa sulla generatrice superiore del cono, riceva da questo un moto rotatorio. Ora io dico, che se partendo da un punto qualunque come L, e andando sempre pel verso indicato dalla saetta, si farà percorrere al calcatoio tutto il perimetro dato LNL'QL, sicchè la rotella giri prima da destra a sinistra, poi da sinistra a destra, la differenza tra i numeri dei giri da essa fatti per questi due versi sarà proporzionale all'area contenuta entro al dato perimetro, e per conseguenza il valor di quest'area sarà conosciuto, qualora si conosca l'area corrispondente ad un giro della rotella.

Si supponga infatti prolungata la superficie del cono fino al suo vertice V, e sia XX' una retta parallela alle guide GG', HH', segnata sul piano della tavola, e la cui distanza orizontale dal vertice V, sia eguale alla distanza orizontale del piano della rotella dalla punta del calcatoio N. Suppongansi condotti il carretto e la riga in posizioni tali, che la punta del calcatoio venga a cadere sul punto M del dato perimetro; dal punto M si abbassi sulla retta XX' la perpendicolare MP, e vicinissima a questa si segni la perpendicolare $mp$. Facendo avanzare tutto il carretto verso destra della quantità piccolissima $nm = Pp$, e spingendo intanto indietro la riga della quantità $Mn$ la punta del calcatoio percorrerà l'archetto piccolissimo $Mm$; la circonferenza del cono girerà per un arco eguale a $Pp$, e la rotella farà, per le cose dette, una parte di rivoluzione proporzionale al prodotto di $Pp$ per RV; ora a motivo di $RV = PM$, questo prodotto non sarà altro che l'area del rettangoletto piccolissimo $Ppmn$, la quale area, a motivo della estrema picciolezza della base $Pp$, sensibilmente non differisce da quella del trapezio mistilineo $PpmM$. Segue da ciò che se si tireranno al dato perimetro le due tangenti SL, S'L' perpendicolari alla retta XX', facendo percorrere al calcatoio l'arco intiero LNML', la rotella farà intanto un numero di giri proporzionale all'area SLNML'S'S. Giunto così il calcatoio in L', per fargli descrivere l'arco opposto L'QL converrà ricondurre il carretto verso sinistra, ed allora per conseguenza il cono e la rotella R prenderanno a girare pel verso contrario a quello che prima seguivano, e il numero de' giri fatti dalla rotella in questo moto retrogrado sarà manifestamente proporzionale all'area L'S'SLQL'. Sottraendo adunque questo numero di giri dal numero de' giri fatti nel moto diretto, il resto sarà proporzionale alla differenza delle due aree SLNL'S', SLQL'S', ossia all'area data SLNL'Q.

Oltremodo incommodo però, nè suscettivo di veruna precisione sarebbe l'uso del planimetro, se fosse mestieri di star noverando uno a uno i giri diretti, poi i giri retrogradi della rotella; ma non è difficile il comprendere come, per via di un sistema di ruote dentate, che non si sono espresse in figura per non sopraccaricarla soverchiamente, si possa tramandare il movimento della rotella a due lancette, le quali, ad imitazione di quelle degli orologi, indichino sopra un lembo graduato l'una i giri, l'altra le centinaia o le migliaia di giri, o meglio ancora le aree corrispondenti a questi numeri di rivoluzioni.

Dopo di Ernst il planimetro venne da altri successivamente perfezionato, principalmente col sostituire al cono rotante un disco circolare di cristallo (1); ma ciò nulla muta al principio geometrico, su cui la costruzione dello strumento riposa, poichè ognun vede che la faccia piana di un disco circolare può riguardarsi come la superficie di un cono generata dalla rotazione di una linea retta perpendicolare all'asse di rivoluzione.

219. Già nel trattare delle viti abbiamo insegnate diverse maniere di descrivere una elica equabile o non equabile sulla superficie di un cilindro o di un cono, mercè la combinazione di due moti, uno rettilineo, l'altro rotatorio, nè ripeteremo adesso le cose allora esposte con bastante estensione; direm bensì che queste osservazioni trovano la loro applicazione in que' congegni che s'impiegano nelle filature per raccogliere

(1) Fra i molti planimetri che facean parte della esposizione universale di Londra venne premiato quello del toscano sig. Gonella. Merita di esser qui citato con lode pei miglioramenti da lui recati al planimetro il sig. Goldschmid valente costruttore di strumenti geodetici a Zurigo (Svizzera).

i fili sugli aspi e sui rocchetti in modo regolare e conforme ai bisogni dell'industria. Egli è manifesto infatti che, girando equabilmente un rocchetto RR (*fig.* 11), se il filo che viene ad avvolgervisi è condotto ad esso da un anello Z, il quale abbia un moto rettilineo ed alternativo secondo la linea DD' parallela all'asse del rocchetto, il filo nell'avvolgersi sulla superficie di questo seguirà l'andamento di due eliche perfettamente regolari ed inclinate a ritroso l'una dell'altra, oppure di altre curve di passo variabile, secondochè il moto dell'anello Z sarà equabile oppure vario. Questo moto poi, qualunque debba essere la legge della sua velocità, potrà essere prodotto da un eccentrico di forma conveniente. Con un eccentrico a cuore (§ 69) la curva del filo sarà una elica; e questo si distribuirà uniformemente su tutta la lunghezza del rocchetto; all'incontro con l'eccentrico della *fig.* 15, *tav.* 6 (§ 70), il quale comunicherebbe all'andivieni AB ed all'anello Z (*tav.* 26, *fig.* 11) un movimento più lento verso i due termini delle corse, che verso il mezzo di essa, il filo si accumulerebbe più verso le due estremità del rocchetto che nella parte mezzana di esso, ed il contrario avverrebbe se l'eccentrico fosse intagliato secondo una curva atta a produrre moto più veloce in principio ed in fin d'ogni corsa, che verso la metà di essa.

Quando sono equabili sì il moto del rocchetto, che quello dell'*andivieni*, merita attento esame l'influenza che esercita sulla disposizione del filo, cioè sul suo modo d'incrocicchiarsi sopra il rocchetto, la diversa ragione che può passare tra le durate delle rotazioni del rocchetto e dell'eccentrico, ond'io mi tratterrò alcuni istanti sovra questo importante argomento per volgere ad esso l'attenzione dei miei lettori.

Supponiamo in primo luogo, che mentre l'eccentrico EE' fa un giro e l'anello Z fa due corse intere da D in D' e da D' in D, il rocchetto faccia un numero intero qualunque di rivoluzioni, per esempio cento. Allora alla fine di ciascun giro dell'eccentrico, l'eccentrico stesso, il rocchetto ed il filo si troveranno ricondotti precisamente nelle medesime posizioni in cui si trovavano al principio del giro; e per conseguenza nel giro seguente il filo tornerà a disporsi sul rocchetto secondo le medesime eliche, secondo le quali si era inviluppato nel giro precedente, e per conseguenza ancora il filo si sovrapporrà continuamente a se stesso, senza mai segnare sulla superficie del rocchetto una nuova curva. Ognun vede quanto viziosa sarebbe questa disposizione, nella quale il rocchetto si troverebbe sopraccaricato di fili in alcuni punti, ed in altri interamente nudo. Ma se ad un giro dell'eccentrico corrisponderà un numero fratto di rivoluzioni del rocchetto, svanirà questo inconveniente, od almeno si renderà tanto minore, quanto sarà maggiore il numero di giri che dovrà fare l'eccentrico, prima che il rocchetto abbia compiuto un numero intero di rivoluzioni. Supponiamo per esempio, che ad un giro dell'eccentrico corrispondano 100 giri ed $\frac{1}{7}$ del rocchetto; le parti del meccanismo non ritorneranno nelle stesse posizioni relative se non di sette in sette giri di eccentrico, e per conseguenza il filo si disporrà successivamente secondo sette coppie di eliche differenti, prima di tornarsi a raccogliere sulle eliche da esso segnate al primo giro dell'eccentrico. Se poi le durate delle rivoluzioni dell'eccentrico e del rocchetto fossero incommensurabili, il filo mai non tornerebbe alle medesime eliche prima segnate.

220. Un esempio della composizione di due moti rotatorii lo abbiamo nel meccanismo della *fig.* 10, *tav.* 26. Due puleggе A, B, di diametro eguale o disuguale, si comunicano il movimento per via del cingolo CDEF. Queste pulegge portano due braccia eguali o disuguali AP, BQ, connesse da un tirante snodato PMQ, cioè da due verghe PM, MQ unite a snodo in M; in questo punto M è fissata la matita che col suo movimento dee segnare la curva SMR, la cui figura dipenderà

dai diametri delle due puleggc A, B, dalle lunghezze delle due braccia AP, BQ, e da quelle delle due verghe PM, QM. Fermando la matita, non già nello snodo M, ma successivamente in diversi altri punti di PM o di QM, si otterrebbero infinite curve differenti. Il caso più semplice è quello in cui le due puleggie, i due bracci e le due verghe sono rispettivamente eguali tra di loro, come si vede nella *fig.* 12, nella quale però alle pulegge si sono sostituite due ruote dentate; se al principio del movimento i punti P, P' si suppongono simmetricamente collocati dalle due parti della verticale condotta pel punto di mezzo della linea dei centri, essi saranno sempre in posizioni simmetriche per tutta la durata del moto, ed il gambo SV della gruccia MVM si muoverà in linea retta, e verticale come se fosse condotto da un solo tirante e ritenuto da piegatelli, da guide o da altro congegno che gli vietasse di scostarsi dalla verticale medesima. La legge di questo movimento si raccoglierà da quanto è stato detto nel § 187.

Questo che abbiamo ora descritto è uno de' tanti congegni immaginati dai meccanici per trasformare il moto rotatorio continuo in rettilineo alternativo e viceversa, la quale trasformazione, a vero dire, è una di quelle che hanno nelle arti più frequenti e più importanti applicazioni. Quando per via del giro di una ruota si vuol comunicare il moto allo stantuffo di una tromba, o quando lo stantuffo di una macchina a vapore dee comunicare il moto ad un altaleno, si viene a fare l'una o l'altra di quelle trasformazioni, ed in entrambi i casi è necessario che si faccia in guisa, che il gambo dello stantuffo si mantenga sempre perfettamente verticale, acciò lo stantuffo stesso si muova sempre parallelamente a se stesso, e non prenda nella tromba o nel cilindro della macchina a vapore una posizione obliqua, per la quale premendo inegualmente dalle diverse parti, esso potesse dar luogo ad ineguali logoramenti, e quindi al trapelamento dell'acqua o del vapore. La trasformazione del moto circolare in rettilineo, o del rettilineo in circolare ha dunque per fine in questi casi di assicurare il parallelismo del moto dello stantuffo, e per questa ragione i congegni atti ad operare quelle trasformazioni si dicono meccanismi di *moto parallelo*.

Uno, ed assai ingegnoso, se ne vede espresso nella *fig.* 14, il quale varrà ancora come applicazione di una proposizione che abbiamo dimostrata nello esporre la teorica delle epicicloidi piane; DAD′D″A′D‴ è una ruota annulare immobile, nel cui centro passa l'asse di una manovella di braccio CO, eguale alla metà del raggio primitivo della ruota; nell'estremità O di questo braccio è impernata la ruota a sprone BMC di raggio eguale a CO; finalmente in M, precisamente sulla circonferenza primitiva di questa seconda ruota, è fitta una caviglia dalla quale pende il gambo MV dello stantuffo. Girando la manovella CO intorno a C, il punto M descrive una ipocicloide che ha per deferente il circolo primitivo della ruota annulare, e per epiciclo il circolo primitivo della ruota a sprone. Or siccome il raggio di questo secondo circolo è la metà di quello del primo, la ipocicloide così descritta si confonde col diametro AA′ (V. capitolo ventesimo, § 136), ed il gambo dello stantuffo mai non esce dalla verticale VC.

Citerò ancora fra i meccanismi destinati alla trasformazione del moto circolare in rettilineo, quello che è dovuto al sig. Roberts, e che è rappresentato nella *fig.* 1, *tav.* 27. Il triangolo isoscele BAB′ è una lastra sospesa ne'suoi due vertici B, B′, a due verghe eguali BC, B′C′ mobili intorno ai centri fissi C, C′. Quando si fa dondolare il triangolo BAB′, il suo vertice A descrive una curva la quale si può far sì che poco differisca da una retta orizzontale. Se s'inclina dapprima il triangolo BAB′ verso sinistra finchè il punto B venga in D (*fig.* 2) sulla verticale CD, il punto A verrà in M. Se poi si fa lo stesso dall'altra parte, inclinando il triangolo finchè il punto B′ venga in D′ sulla verticale C′D′, il vertice A passerà in M′; ed è sempre possibile di proporzionare così tutte le parti del meccanismo, che i tre punti M, A, M′ cadano in linea retta, nel qual caso la curva intera descritta da A si confonderà sensibilmente con questa retta medesima (1).

221. Per quanto ingegnosi sieno questi varii mezzi di ottenere un moto parallelo, essi sono poco o nulla in uso, e vengono invece generalmente impiegati quelli di cui sto per parlare, dopo che avrò indicato il principio dal quale la riuscita loro dipende.

(1) La condizione enunziata nel testo può risolversi in queste due, cioè:

1° Che quando il punto B coincide con D, il lato AB del triangolo BAB′ divenga perpendicolare a DD′.

2° Che sia BA = AE + EG.

Per esprimere algebricamente queste due condizioni, pongansi DD′ = $2a$, BB′ = $2b$, AE = $c$, DC = $h$, e si tiri DC′ (*fig.* 2); la prima condizione esige che sia

$$\begin{aligned}\text{ang. MDB}' &= \frac{1}{2}\pi - \text{B}'\text{DD}' \\ &= \frac{1}{2}\pi - \text{C}'\text{DD}' + \text{C}'\text{DB}' \\ &= \text{DC}'\text{D}' + \text{C}'\text{DB}'\ ;\end{aligned}$$

ossia

$$\text{ang}\left(\text{tang} = \frac{c}{b}\right) = \text{ang}\left(\text{tang} = \frac{2a}{h}\right) + \text{ang}\left(\cos = \frac{a^2+b^2}{b\sqrt{4a^2+h^2}}\right) \ldots (1).$$

La seconda condizione poi, a motivo di EG = DF = $\sqrt{\overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{BF}}^2}$ è contenuta nella equazione

$$\sqrt{b^2+c^2} = c + h - \sqrt{h^2-(a-b)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Possono dunque assumersi ad arbitrio due delle quattro indeterminate $a$, $b$, $c$, $h$ e le due condizioni ora scritte determineranno le altre due: ma queste condizioni, tuttochè entrambe algebriche, sono sì complicate che difficile riuscirebbe il trarne alcuna espressione generale delle indeterminate. Il meglio sembra essere di assumere ad arbitrio i valori di $a$ e $b$, e facendo diverse ipotesi sul valore di $c$, dedurne per via della (2) i corrispondenti valori di $h$, e cercar poi quali sistemi di valori meglio soddisfacciano alla (1).

Sul tirante PQ articolato in P, Q coi due bracci AP, BQ (*tav.* 27, *fig.* 3) si consideri un punto M collocato verso il mezzo della lunghezza del tirante. Mentre questo si muove, e passa per tutte le posizioni che può prendere tra le due circonferenze P'PP", Q'QQ" descritte dai punti P, Q, il punto M descrive una curva CMD che ha la forma a un dipresso della cifra 8, i cui due rami si tagliano nel punto M, e che ha nelle vicinanze di questa intersezione due punti di flesso, cioè due punti nei quali la concavità della curva si cangia in convessità. Abbiamo già fatto notare altrove (V. capitolo decimo, § 61) che ne' punti di flesso ogni curva moltissimo si accosta alla sua tangente, e per un breve tratto sensibilmente con essa si confonde; nel caso poi della curva particolare che ora consideriamo, una notabile porzione QMP, di qua e di là dal punto d'incrociamento M ha una curvatura così poco sensibile che può, quasi senza errore, considerarsi come una linea retta; epperò il moto rotatorio delle braccia AP, BQ trovasi trasformato in un moto sensibilmente rettilineo fatto dal punto M del tirante che li unisce.

Questa osservazione dovuta a Watt lo condusse alla invenzione dei meccanismi, de' quali prendiamo a trattare. Siano AP, BQ (*fig.* 4) due braccia mobili intorno ai centri A, B ed unite dal tirante PQ. Siano questi centri collocati in modo che quando i bracci sono in posizioni orizzontali, come la figura li rappresenta, il tirante sia verticale, od in altri termini, sia la distanza orizzontale dei due centri eguale alla somma delle due braccia, e la loro distanza verticale sia uguale alla lunghezza del tirante. Supponiamo ora, che il braccio AP si abbassi descrivendo l'angolo PA$p$; il moto si comunicherà per via del tirante al braccio BQ, il quale descriverà l'angolo QB$q$, e passerà nella posizione B$q$, prendendo il tirante la posizione inclinata $pq$. Ora vi ha sulla lunghezza del tirante un punto M, che, in questo movimento della macchina sensibilmente non si scosterà dalla verticale PQL, e tale per conseguenza che se ad esso si attaccherà l'estremità superiore del gambo di uno stantuffo, questo ne riceverà un moto parallelo.

Per iscoprire quale sia questo punto M, il cui movimento può riguardarsi come rettilineo, supponiamo che siano $Ap$, $Bq$ le posizioni in cui si trovano i due bracci alla fine della corsa discendente dello stantuffo, cioè che questi bracci non debbano mai fare con l'orizonte angoli maggiori di $PAp$ e di $QBq$. Quel punto M del tirante, che in questa posizione della macchina si troverà sulla verticale PQ sarà quello che cerchiamo, poichè in tutte le altre posizioni meno inclinate delle due braccia esso appena uscirà dalla verticale medesima.

Ora a motivo dei due triangoli simili $phM$, $qiM$, avremo:

$$pM : qM :: ph : Mi,$$

cioè il punto M dividerà il tirante $pq$ in due parti direttamente proporzionali alle linee $ph$, $Mi$, oppure alle linee eguali $Pr$, $Qs$, che sono le saette di due archi, uno doppio di $Pp$, l'altro doppio di $Qq$.

Purchè gli angoli $PAp$, $QBq$ descritti dai due bracci non sieno troppo grandi, gli archi corrispondenti $Pp$, $Qq$ saranno di lunghezza sensibilmente eguale; ora si può dimostrare, che le saette di due archi circolari di eguale lunghezza, e di picciol numero di gradi, presi sopra circoli di raggi differenti, stanno tra loro prossimamente in ragione inversa dei raggi; avremo dunque

$$ph : Mi :: BQ : AP,$$

e per conseguenza $\quad pM : qM :: BQ : AP;$

onde concluderemo, che il punto M dee dividere la lunghezza del tirante in parti reciprocamente proporzionali alle lunghezze delle due braccia contigue. Così se il braccio AP fosse doppio di BQ, divisa la lunghezza del tirante $pq$ in tre parti eguali, il punto M cadrebbe nel primo punto di divisione dalla parte di $p$.

E se i due bracci saranno eguali, il punto M sarà alla metà di $pq$ (1).

222. Per dare una idea della picciolezza degli scarti del punto M a dritta e a manca della verticale PQ, noi recheremo qui una tavola tolta ad imprestito da quell' opera del sig. Willis, che abbiamo tante volte citata. Suppongansi i due bracci eguali ad un metro, ed il tirante a mezzo metro; quando i bracci AP, BQ faranno sopra o sotto l'orizonte gli angoli qui sotto segnati, le deviazioni del punto di mezzo del tirante dalla verticale saranno quelle che seguono:

| | Inclinazione dei bracci AP | BQ | Deviazioni del punto di mezzo del tirante |
|---|---|---|---|
| sopra l'orizontale | 25° | 27° 15′ | 0,m 00864 |
| | 20° | 20° 54′ | 0, 00274 |
| | 15° | 15° 17′ | 0, 00064 |
| | 10° | 10° 3′ | 0, 00007 |
| | 0° | 0° 0′ | 0, 00000 |
| sotto l'orizontale | 10° | 9° 57′ | 0, 00007 |
| | 15° | 14° 44′ | 0, 00060 |
| | 20° | 19° 7′ | 0, 00258 |
| | 25° | 22° 48′ | 0, 00777 |

(1) Come si vede tutta questa dimostrazione riposa sopra due supposizioni, che non sono ammessibili rigorosamente, salvo quando gli angoli $PAp$, $QBq$ sono infinitamente piccoli; allora infatti gli archi $Pp$, $Qq$ confondendosi con due latercoli verticali, il tirante non devierà da questa direzione, e gli spazii descritti dalle sue estremità saranno necessariamente eguali tra di loro; o per dir meglio la deviazione del tirante dalla verticale essendo infinitamente piccola di secondo ordine, la sua proiezione verticale non differirà dalla sua lunghezza assoluta, epperò gli archetti $Pp$, $Qq$ saranno eguali tra di loro. Confondendosi poi questi archi con le loro proiezioni verticali, ed essendo le loro saette $Pr$, $Qs$ trascurabili a fronte de' raggi AP, BQ, avremo

$$\overline{Pp}^2 = 2AP.Pr\,, \qquad Qq^2 = 2BQ.Qs\,;$$

onde

$$AP\,.\,Pr = BQ\,.\,Qs\,;$$

che è la proposizione invocata nel testo.

Così per qualunque inclinazione delle braccia minore di 20°, al dissopra e al dissotto dell'orizontale, il punto di mezzo del tirante, con una corsa di più di 34 centimetri, non verrebbe mai a deviare di tre millimetri da una parte o dall'altra della verticale (1).

(1) Le formule, mercè delle quali è stata computata la tavola riferita nel testo, ponno generalizzarsi così :

Sieno (*tav.* 27, *fig.* 4) $AP = a$, $BQ = b$, $PQ = l$ e per una posizione qualunque $Bqp A$ del sistema articolato dicansi

$$\text{ang.}\, PAp = \varphi, \quad \text{ang.}\, QBq = \psi, \quad \text{ang.}\, pqS = \theta,$$

saranno

$$Pr = a \sin \text{vers}\, \varphi = 2a \sin^2 \frac{1}{2}\varphi, \quad pr = a \sin \varphi;$$

$$PS = Qs = b \sin \text{vers}\, \psi = 2\, b \sin^2 \frac{1}{2}\psi;$$

$$s'q = l \cos \theta + a \sin \varphi;$$

e quindi

$$\sin \theta = \frac{Pr + PS}{l} = 2 \, . \, \frac{a \sin^2 \frac{1}{2}\varphi + b \sin^2 \frac{1}{2}\psi}{l};$$

o prossimamente

$$\sin \theta = \frac{a\varphi^2 + b\psi^2}{2l};$$

ed ammettendo per un istante, che sia $a\varphi = b\psi$, affin di procurarci un valor prossimo di $\sin \theta$, avremo

$$\sin \theta = a\varphi^2 \, . \, \frac{a + b}{2bl}.$$

Per mezzo di questa espressione sarà facile trovare il valore di $\psi$ in funzione di $\varphi$, poichè l'eguaglianza delle rette $Sq$, $rt$ somministra la relazione

$$l + b \sin \psi = a \sin \varphi + l \cos \theta;$$

ossia $$b \sin \psi = a \sin \varphi - l \, . \sin . \text{vers}\, \theta.$$

E quindi le due coordinate PR, RM del punto M, che divide la retta

Questa deviazione si può ancora diminuire con una disposizione un po' differente dei centri; supponendo sempre eguali le lunghezze delle due braccia, sia A$p$ (*fig.* 5) la posizione più bassa, che debba mai prendere il braccio AP girando intorno al centro A. Pel punto $p$ si conduca la verticale $p$V, e fatto centro in P con raggio eguale alla lunghezza del tirante si tagli questa verticale in Q; pel punto Q si tiri l'orizzontale QB eguale alla lunghezza comune delle braccia, e si ponga in B il centro del movimento del secondo braccio. Così disposte le cose, il tirante prenderà inclinazioni sensibilmente eguali a destra e a sinistra nelle due posizioni estreme delle braccia, cioè quando queste sono orizzontali in AP, BQ, e quando sono al più basso delle loro corse in A$p$, B$q$; ed il punto di mezzo M a mala pena si scosterà mai dalla verticale, a segno tale, che con due braccia di un metro e con un tirante di mezzo metro, il braccio superiore potrà inclinarsi di 20°, senza che la deviazione del punto M arrivi ad un mezzo millimetro.

Con le due disposizioni delle *figg.* 4 e 5 le due braccia sono collocate di qua e di là del tirante; esse potrebbero ancora collocarsi entrambe dalla medesima parte, come si vede nella *fig.* 6: ma allora il punto M, invece di cadere tra le due articolazioni P, Q, cadrebbe fuori di esse dalla parte del braccio

$pq$ in parti reciprocamente proporzionali alle lunghezze $a$, $b$ dei due bracci, si avranno osservando che

$$\mathrm{RM} = pr + pq \cdot \cos\theta \cdot \frac{b}{a+b} = a \sin\varphi + \frac{b\,l\cos\theta}{a+b}\ ;$$

$$\mathrm{PR} = \mathrm{P}r - r\mathrm{R} = \frac{2a^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi - 2b^2\sin^2\frac{1}{2}\psi}{a+b}.$$

Mercè di queste formule si calcoleranno i valori di PR per tutti i punti della mezza corsa discendente P$p$; quanto alla mezza corsa ascendente è manifesto che basterà nelle medesime formule di scambiare $a$ con $b$ e $\varphi$ con $\psi$.

maggiore AP, e si dimostrerebbe nello stesso modo di prima che le sue distanze MP, MQ dalle articolazioni P, Q debbon essere inversamente proporzionali alle lunghezze delle braccia contigue AP, BQ.

223. Sia ora APD (*tav.* 27, *fig.* 7) la *bilancia* o *leva maestra* di una macchina a vapore, la quale oscilli dissopra e dissotto dell'orizzontale condotta pel centro A; e sia BQ un braccio di cui fra poco determineremo la lunghezza, articolato in Q col tirante QP. Per le cose dette finquì, dividendo la lunghezza QP del tirante in due parti PM, QM inversamente proporzionali ad AP, BQ, il punto M si muoverà in linea sensibilmente retta e verticale, quando la bilancia APD passerà in $Apd$, il braccio BQ in $Bq$, il tirante PQ in $Pq$, ed il punto M in $m$. Si compia il parallelogramma $dpqe$, e s'intenda che $de$, $qe$ sieno due verghe rigide rispettivamente eguali a $dp$, $pq$, ossia a DP, PQ, e si conduca la retta $Ae$. Se questa retta passerà pel punto $m$, i due triangoli $Apm$, $Ade$ saranno simili, poichè le rette $pq$, $de$ sono due lati opposti del parallelogramma $pqed$: avremo dunque la proporzione

$$Am : me :: Ap : pd ,$$

ossia

$$Am : me :: AP : PD ,$$

e per conseguenza il punto $e$ si troverà sempre sulla verticale condotta pel punto D, come $m$ si trova sempre sulla verticale condotta pel punto P.

Ora la similitudine dei due triangoli $Apm$, $eqm$ ci dà

$$qm : pm :: eq : Ap ,$$

cioè

$$qm : pm :: DP : AP ;$$

ma noi abbiamo collocato il punto $m$ in modo che sia

$$qm : pm :: AP : BQ ;$$

avremo dunque ancora, confrontando queste due proporzioni tra loro,

$$DP : AP :: AP : BQ;$$

e da questa concluderemo, che, acciò il punto *e* si muova in linea retta e verticale, è necessario che la distanza AP sia media proporzionale tra DP e BQ.

Il telaio mobile formato delle cinque spranghe A*d*, *de*, *pq*, *qe* e B*q* è ciò che chiamasi il *parallelogramma di Watt;* esso ci dà due punti *m* ed *e*, i quali si muovono secondo linee sensibilmente rette e verticali, quando la bilancia AD oscilla intorno al punto A. La verga *de* si suol chiamare il *tirante maestro*, la *pq* il *tirante di dietro*, la *eq* la *spranga parallela*, e la B*q* finalmente la *briglia*.

Il parallelogramma di Watt è generalmente impiegato nelle grandi macchine a vapore stazionarie; al punto *e* si attacca il gambo dello stantuffo a vapore, che dà il movimento a tutta la macchina; nel punto *m* si articola il gambo di un altro stantuffo, cioè di quello della tromba ad aria. Questo sistema vedesi rappresentato nella sua forma più usuale nella *fig.* 8 della *tav.* 27. I lettori che bramassero conoscere le molte modificazioni, di cui questo meccanismo è suscettivo, dovranno ricorrere ai libri che trattano specialmente delle macchine a vapore.

# CAPITOLO TRENTESIMOSECONDO ED ULTIMO

## DI MOLTE PARTI DELLE MACCHINE CHE NON SONO DEL DOMINIO DELLA CINEMATICA - DELLE MACCHINE COMPOSTE - ATTINENZA DELLA CINEMATICA E DELLA MECCANICA.

224. I meccanismi, di cui siam venuti finquì descrivendo le forme e dichiarando gli effetti, sono sicuramente lontani dal comprendere tutti quelli che l'umana industria ha saputo immaginare e felicemente applicare, e neppur tutti quelli che veggonsi raccolti ne' musei e registrati nelle opere ogni dì più numerose di Tecnologia. Ma in questo, come in ogni altro studio, più che la copia, ci sembra dover giovare la scelta degli esempli, i quali debbono reputarsi bastanti quando sieno tali e tanti, che faccian conoscere le principali e più utili applicazioni di tutti i principii teorici della scienza, e diano opportunità di svolgere le diverse forme di ragionamento, mercè delle quali da que' generali principii si discende alle particolari conseguenze. Noi quindi portiamo speranza che i meccanismi, de' quali abbiamo tenuto ragionamento, ed i particolari ne' quali siamo entrati rispetto a ciascuno di essi, valgano a far sì che i nostri lettori non abbiano a provar gravi difficoltà nel render ragione a se stessi di quegli altri, dei quali, o per non averne avuto contezza, o per non accrescere a dismisura la mole di questi elementi, ci siamo astenuti dal fare speciale menzione.

225. Ma oltre all'amore di brevità, altre ragioni ancora ci hanno portati a tacer deliberatamente di alcune cose, delle quali l'esempio di autorevolissimi scrittori di Cinematica avrebbero

potuto indurci a far parola. Sono infatti nelle macchine molte parti, delle quali chi prende a scrivere un trattato compiuto della Composizione delle macchine è certamente tenuto a dar contezza, ma non già chi si propone di esporre gli elementi della Cinematica applicata; poichè molte di quelle parti o punto non sono del dominio di questa scienza, od hanno dai principii di alcun'altra così diretta dipendenza, che, senza aver prima esposti questi principii non è possibile il trattare di esse in modo chiaro ed esatto. Quindi è che abbiamo creduto, non solamente di potere, ma assolutamente di dover astenerci dal parlare de'*sostegni fissi* e *mobili*, delle *guide*, de'*propulsori* o *primi mobili*, di quelli che abbiamo altrove designati sotto il nome di *strumenti*, de'congegni atti a scemare o ad accrescere *la resistenza dell'attrito*, o *quella dell'aria*, de'meccanismi il cui gioco dipende dalla *elasticità*, e finalmente degli *organi regolatori* delle macchine.

I sostegni fissi e le guide, non destinati a dare, nè a ricevere movimento, ma sì solo ad impedir quelli che potessero nuocere all'effetto che la macchina dee produrre, hanno per requisiti loro essenziali la solidità e stabilità. Ora queste, siccome dipendenti dalla massa e dal peso de'sostegni, dalla tenacità della materia di cui sono formati, e dalla più acconcia loro forma e disposizione, sono di spettanza della Meccanica applicata e non punto della Cinematica; epperò *fondazioni*, *colonne*, *ritti*, *staggi*, *seggi*, *castelli*, *ralle*, *guancialetti* ci son sembrati oggetti affatto estranei al nostro argomento.

Lo stesso dee pur dirsi de' sostegni mobili, che sono gli *alberi* e i loro *pernii*, poichè questi tuttochè ricevano movimento dalle parti con le quali sono connessi, non hanno però uffizio di modificare questo movimento nel trasmetterlo ad altre, ma sì solamente di servir d'appoggio alle parti rotanti, vietando loro di prendere altro moto che il rotatorio; sicchè anche di questi la condizione più essenziale è la solidità, alla quale può aggiungersi quella di andar soggetti al minimo attrito possibile: or l'attrito essendo una forza, è esso pure oggetto delle ricerche della Meccanica applicata.

I *propulsori*, o come gli abbiamo chiamati, i *primi mobili*, sono quegli organi, che ricevendo direttamente l'impulso della forza motrice, ne trasmettono l'azione ad altri organi contigui, dai quali essa viene mano mano trasmessa fino allo *strumento*, e per mezzo di questo, alla materia sulla quale si compie il lavoro. Or questi *propulsori* o *primi mobili*, in quanto tramandano il moto che hanno ricevuto, sono certamente di spettanza della Cinematica, ma non già in quanto sostengono l'azione del motore e ne ricevono l'impulso; poichè sotto questo secondo rispetto la sola Meccanica tecnica può insegnare a disporli in guisa, che secondo la varia indole dei motori sieno atti a procurare il migliore e più vantaggioso impiego della forza dei medesimi. Quanto alla trasmissione del movimento, essi necessariamente operano o per immediato contatto, o per via di cingoli, di cappii o di fluidi, epperò sotto questo rispetto, che è il solo per cui essi appartengano alla Cinematica, essi van pure soggetti alle medesime leggi che regolano l'azione di tutti gli altri meccanismi, e sono implicitamente compresi nelle regole che ne abbiamo dedotte, senzachè fosse bisogno di fare di essi espressa menzione.

Le medesime considerazioni valgano pure per gli *strumenti*, i quali, in quanto sono atti ad operare nella materia sottoposta al lavoro questa o quella modificazione, appartengono esclusivamente alla Tecnologia; in quanto poi ricevon moto dagli altri organi della macchina di cui fanno parte, il ricevono necessariamente in alcuna delle maniere e secondo le leggi da noi esposte.

De' congegni destinati a scemare o ad accrescere l'attrito o la resistenza dell'aria, e di quelli nella cui azione ha parte essenziale la elasticità, come son quelli che son mossi da fluidi aeriformi, non è possibile il trattare, senza trattar prima dell'attrito e della elasticità de'solidi e de'fluidi, cioè senza uscir dal campo della Cinematica; e ciò rende ragione del nostro silenzio intorno alla miglior disposizione delle *ruote* e delle *scarpe* de'veicoli, de'*rulli* e de'*curri*, delle *valvole ordinarie*, de' *cappelli* o *valvole a sdrucciolo*, degli *stantuffi*, ecc. Nè diverse sono le considerazioni che ci hanno distolti dal parlare degli organi regolatori delle macchine, cioè dei *volanti*, dei *freni* e dei *governatori*.

226. Dopo di avere particolarmente descritti gli organi semplici della trasmissione del moto, potrebbe chiedercisi il perchè non abbiamo con alcuni esempli dimostrato in qual modo questi organi medesimi si possano combinare tra di loro per formarne macchine acconce a questo od a quell'altro lavoro. Da questa dimostrazione ci siamo trattenuti per tre ragioni principalmente, cioè: 1° Perchè essa più direttamente appartiene alla Tecnologia che alla Cinematica; 2° Perchè nell'esame di una macchina qualsiasi, per le ragioni stesse che si sono svolte nel § precedente, egli è quasi impossibile di sceverare le considerazioni puramente geometriche, da quelle di Fisica e di Meccanica, senza rendere o poco intelligibile, o poco fruttuosa la descrizion della macchina; e 3° Finalmente perchè nella scelta degli esempli era quasi inevitabile l'uno o l'altro sconcio, o di doverci limitare a sole macchine impiegate in una o due arti soltanto, oppure, volendo abbracciare più largo campo, o di riuscire soverchiamente prolissi, o di trasvolare così rapidamente sovra ciascun oggetto, da cadere inevitabilmente nell'oscuro e nel confuso. Tuttavia anche di macchine composte non abbiamo ommesso di addurre alcuni esempli; e poichè qui se ne pare la opportunità, aggiungeremo che esse, per quanto spetta a Cinematica, ci sembrano potersi acconciamente distinguere in tre generi. Nel primo genere, che comprende quasi tutte le macchine più comunemente impiegate, collocheremo quelle nelle quali il movimento si trasmette, modificandosi in direzione ed in velocità, dal primo mobile fino allo strumento per via di una serie semplice di organi

meccanici, in modo che lo strumento riceva dal penultimo organo della serie un movimento *unico*, quanto si voglia differente da quello del primo mobile: oppure, qualora sianvi più strumenti, ognuno riceva parimente un moto unico; tali sono per esempio i sistemi di puleggie o di ruote dentate, dei quali abbiamo diffusamente trattato a suo luogo. Il secondo genere di macchine composte consterà di quelle, nelle quali lo strumento riceve simultaneamente da due o più organi meccanici, due o più movimenti semplici, dai quali risulti un movimento complesso; e di queste abbiam recati parecchi esempli nel capitolo precedente. Finalmente riguardiamo come appartenenti al terzo genere quelle altre macchine, il cui effetto risulta dai moti relativi delle diverse parti della macchina stessa, quali sono alcune di quelle che abbiamo considerate nel capitolo ora citato.

Per compiere ciò che l'indole del presente trattato ci permette di esporre intorno alle macchine composte ci resta da esporre sulla trasmissione del movimento in queste macchine una proposizione generale, la quale può dirsi contenere in sè tutta la teoria delle macchine di primo genere, e, purchè venga combinata coi principii esposti nel capitolo trentesimoprimo, quella pure di tutte le altre.

227. La quistione che la Cinematica propone a se stessa intorno a qualsivoglia organo meccanico è questa: *Date per un determinato istante la direzione e la velocità del moto di un punto qualunque del meccanismo, trovare quali sieno nel medesimo istante la direzione e la velocità di un altro punto qualsivoglia di esso.* Questa quistione, come abbiam veduto, è di sua natura sempre determinata; poichè (tranne il caso particolarissimo de'*punti morti*) per ciascun movimento del pezzo conduttore, il pezzo condotto non può mai prendere che un movimento solo, a cagione della connessione di tutte le parti del meccanismo. Ora, per ogni macchina composta di qualsivoglia numero di meccanismi semplici dati, disposti in modo parimenti

dato, noi possiamo proporci la medesima quistione, cioè domandare quali saranno la direzione e la velocità dello strumento, quando si conoscano quelle del primo mobile.

A questa domanda così generale, si può rispondere in termini egualmente generali, come segue:

Si risolva col pensiero la macchina data ne' meccanismi semplici che la compongono, in guisa che il *cedente* del *primo mobile* sia pure il *movente* del secondo meccanismo semplice; il cedente di questo sia il movente del terzo, e così via via fino allo *strumento* che sarà il cedente dell'ultimo meccanismo. Si considerino tutti questi pezzi come venuti nelle posizioni per cui debbono passare simultaneamente nell'istante per cui si vuol determinare il moto dello strumento. Ognuno di questi pezzi essendo suscettivo di due movimenti direttamente contrarii, si stabilisca ad arbitrio per ogni pezzo quale di questi movimenti si voglia riguardare come *diretto*, quale come retrogrado. E prendendo a considerare ciascun meccanismo semplice separatamente, si distinguano coi nomi di *meccanismi diretti* e di *meccanismi retrogradi* quelli in cui ad un moto *diretto* del movente corrisponde un moto *diretto* del cedente, e quelli in cui al moto diretto di quello corrisponde un moto retrogrado di questo. Si determini ancora per ciascun meccanismo, secondo le regole precedentemente dimostrate, il valore della ragione delle velocità de' suoi due pezzi, per quelle posizioni per cui essi passeranno nell'istante proposto; tutto ciò premesso, dico che:

1° Al moto diretto del primo mobile corrisponderà moto diretto, oppur moto retrogrado dello strumento, secondochè il numero de' meccanismi retrogradi della macchina sarà pari od impari.

2° La ragione delle velocità del primo mobile e dello strumento sarà eguale al prodotto delle ragioni di velocità di tutti i meccanismi semplici della macchina.

Ovvia applicazione delle due parti di questa regola ci offrono i rotismi del genere di quello rappresentato nella *fig.* 21, *tav.* 11. Consideriamo infatti come diretto il moto di una qualunque delle ruote, quand'essa si rivolge da sinistra a destra; allora, per le cose dimostrate a suo luogo, ogni incastro *interno* sarà meccanismo diretto, ed ogni incastro *esterno*, retrogrado. Ancora: in ogni incastro di due ruote dentate la ragione della velocità angolare del cedente, a quella del movente, è eguale alla ragione del numero de' denti del movente al numero de' denti del cedente; quindi:

1° In ogni rotismo il moto della prima ruota essendo diretto, quello dell'ultima sarà diretto o retrogrado, secondo che il numero degli incastri esterni sarà pari od impari.

2° La ragione della velocità angolare dell'ultima ruota a quella della prima sarà espressa dal prodotto di tante frazioni, quanti sono gli incastri, ciascuna delle quali abbia per numeratore il numero dei denti di una delle ruote conduttrici, e per denominatore il numero dei denti della corrispondente ruota condotta. Or questo prodotto è manifestamente eguale alla frazione, il cui numeratore è il prodotto de' numeri de' denti di tutte le ruote conduttrici, ed il denominatore è il prodotto de' numeri de' denti di tutte le ruote condotte; questa sarà dunque la cercata ragion di velocità del sistema. La qual conchiusione ci riconduce alla regola del n° 3 del § 128.

228. La dimostrazione del teorema generale del § precedente si presenterà da sè allo spirito di chi legge; infatti, quanto alla prima parte di esso, è chiaro che se in una macchina qualunque tutti i meccanismi semplici di cui essa si compone saranno *diretti*, anche la macchina intiera sarà *diretta*, cioè tale, che il primo mobile e lo strumento o avranno entrambi moto diretto, od entrambi retrogrado. Che se fra gli organi semplici della macchina ve n'avrà uno solo che sia retrogrado, allora camminando il primo mobile direttamente,

tutti i pezzi della macchina fino al movente del meccanismo retrogrado inclusivamente avranno pure moto diretto; ma tutti gli altri dal cedente di questo meccanismo fino allo strumento inclusivamente, avranno moto retrogrado. Fingasi ora che la macchina contenga un numero pari di meccanismi retrogradi, essi cagioneranno un numero pari di inversioni nella direzione del moto, e poichè due inversioni successive manifestamente si distruggono, cioè ristabiliscono la primitiva direzione del movimento, l'effetto sarà il medesimo come se non vi fosse inversione veruna, e per conseguenza il moto dello strumento sarà del medesimo nome che quello del primo mobile, e la macchina intera sarà *diretta*. Ma se il numero de' meccanismi retrogradi sarà impari, le inversioni ch'essi producono, si distruggeranno due a due, da una infuori, la quale avrà per effetto di dare allo strumento un moto di nome contrario a quello del primo mobile, e la macchina intiera sarà per conseguenza retrograda.

Nè più difficile a dimostrarsi è la seconda parte del teorema relativa alla ragione della velocità dei due pezzi estremi. Si designino con le lettere A, B, C, D. . . . . N i singoli pezzi, che compongono la macchina dal primo mobile allo strumento; su ciascuno di questi pezzi intendasi segnato ad arbitrio un punto, e siano $V, V', V'', V'''\ldots\ldots V^{(n)}$ le velocità da cui questi punti sono simultaneamente animati in una determinata posizione della macchina. I due pezzi A e B formeranno il primo meccanismo semplice, e la ragion di velocità di questo sarà $\frac{V'}{V}$; il meccanismo semplice seguente avrà B per movente e C per cedente, e la ragione della velocità sarà in esso $\frac{V''}{V'}$;

e così similmente le frazioni $\frac{V'''}{V''}, \frac{V^{\text{iv}}}{V'''}\ldots\ldots\frac{V^{(n)}}{V^{(n-1)}}$ saranno le ragioni di velocità del terzo, del quarto. . . . . dell'ultimo meccanismo. Ora facendo il prodotto di tutte queste frazioni, come porta il teorema che vogliam dimostrare, si avrà la frazione.

$$\frac{V' \times V'' \times V''' \times V^{\text{IV}} \ldots \ldots \times V^{(n)}}{V \times V' \times V'' \times V''' \ldots \ldots \times V^{(n-1)}};$$

nella quale, pel modo stesso in cui è stata formata, si scorge che i fattori $V'$, $V''$, $V'''$, $V^{\text{IV}} \ldots \ldots V^{(n-1)}$ sono comuni al numeratore ed al denominatore: sopprimendo dunque tutti questi fattori, il prodotto enunciato si ridurrà alla frazione semplice $\frac{V^{(n)}}{V}$, che è manifestamente la ragione della velocità del primo mobile e dello strumento, ossia la ragione di velocità della proposta macchina.

Questa dimostrazione si applica egualmente a tutti i casi, sia che i pezzi della macchina abbiano tutti moto progressivo, od alcuni moto progressivo e gli altri rotatorio, o tutti rotatorio. Ma in quest'ultimo caso non è necessario considerare in ciaschedun pezzo un punto determinato, e basterà prendere per le velocità $V$, $V'$, $V'' \ldots \ldots V^{(n)}$ le velocità angolari de' singoli pezzi; poichè la velocità angolare essendo quella de' punti la cui distanza dall'asse di rotazione è eguale alla unità, si verrà così a supporre tacitamente che i punti, ai quali le velocità $V$, $V'$, $V'' \ldots \ldots V^{(n)}$ si riferiscono, sono ciascuno all'unità di distanza dall'asse di rotazione del pezzo, cui esso punto si riferisce.

229. E qui noi prendiam commiato dal cortese lettore, che ci avrà voluti seguire pel lungo cammino che abbiamo percorso. Dell'ultimo teorema che ora abbiamo dimostrato, e mercè del quale in ogni macchina per quanto essa sia complicata è sempre possibile assegnare quale sarà in direzione ed in velocità il movimento dello strumento, dato che sia quello del primo mobile, non è necessario che noi ci arrestiamo a far palese con esempli quanta esser possa l'utilità per l'invenzione e pel buon governo delle macchine destinate ai la-

vori dell'industria; poichè è manifesto, che essa sola può metterci in grado di congegnar la macchina in guisa ch'essa sia atta a dare allo strumento che conduce gli stessi movimenti, ch'esso riceverebbe dalla mano di un valente operaio. Questo solo aggiungeremo, che il teorema di cui parliamo forma come l'anello di congiunzione della Cinematica e della Meccanica; poichè grazie ad una proposizione celebre per gli immortali lavori di Archimede, di Galileo e di Lagrange, e che va sotto il nome di *Principio delle velocità virtuali*, la conoscenza della ragione di velocità di una macchina tosto somministra la condizione di equilibrio delle forze che operano sulla macchina stessa; e questa conoscenza è indispensabile per poter determinare il moto che la macchina effettivamente riceve, quando quella condizione di equilibrio non è sod-disfatta.

FINE.

# INDICE ANALITICO

## DEI CAPITOLI E DEI PARAGRAFI

§ 25. Se una figura piana si muove comunque nel proprio piano, il suo moto può per un istante riguardarsi come una rotazione fatta intorno ad un punto di questo piano.

Se una figura piana si muove comunque nel proprio piano, questo moto può in infinite guise scomporsi in due movimenti l'uno progressivo, l'altro rotatorio, assumendo ad arbitrio l'uno o l'altro movimento.

Se un solido si muove in guisa che una delle sue sezioni mai non esca dal proprio piano, il moto potrà per un istante riguardarsi come una rotazione intorno di un asse perpendicolare a quel piano.

Se un solido si muove in guisa che una delle sue sezioni mai non esca dal proprio piano, il moto può in infinite guise scomporsi in una progressione secondo una retta condotta in quel piano, ed una rotazione intorno di un asse perpendicolare allo stesso piano.

Se un solido si muove in guisa che una sua sezione si mantenga sempre parallela a se stessa, il moto può scomporsi in un moto progressivo secondo una retta perpendicolare a quel piano, ed in un moto rotatorio intorno a questa retta.

§ 26. Se ad un solido si imprimono due movimenti l'uno rotatorio intorno d'un dato asse, l'altro progressivo secondo una retta contenuta in un piano perpendicolare all'asse, il doppio moto equivale ad una semplice rotazione fatta intorno un asse parallelo all'asse dato – Asse di spontanea rotazione.

§ 27. Se una retta si muove comunque nello spazio, il suo moto può in infinite guise risolversi in un moto progressivo secondo una certa retta, ed in un moto rotatorio intorno alla medesima.

§ 28. Quando un solido gira comunque intorno di un punto fisso, il suo moto può per un istante riguardarsi come una rotazione fatta intorno di un asse che passa per quel punto – Asse istantaneo di rotazione.

§ 29. Se un solido si muove in qualunque modo nello spazio, il suo movimento può in infinite guise riguardarsi per un istante come composto di due rotazioni intorno a due assi che generalmente non si incontrano.

---

## *Addizione alla pagina* 95.

§ 66. *bis.* In tutto questo capitolo, limitandoci a considerare il caso più frequente, noi abbiam supposto che la direzione della stanghetta fosse perpendicolare alla base del cuneo; ma il ragionamento del § 59 si applica egualmente, qualunque sia la direzione della stanghetta, e porta a conchiudere, che in tutti i casi la velocità di questa sta alla velocità del cuneo come i lati $Mq'$, $q'O$ del triangolo $Mq'O$ (*tav.* 4, *fig.* 11), il quale però, generalmente parlando, non sarà più rettangolo. Merita speciale considerazione il caso in cui la stanghetta si suppone perpendicolare al filo del cuneo, poichè allora l'angolo $OMq'$ divien retto ed il triangolo $Mq'O$ si confonde col triangolo $MM'O$ simile ad $ABC$; ed essendo

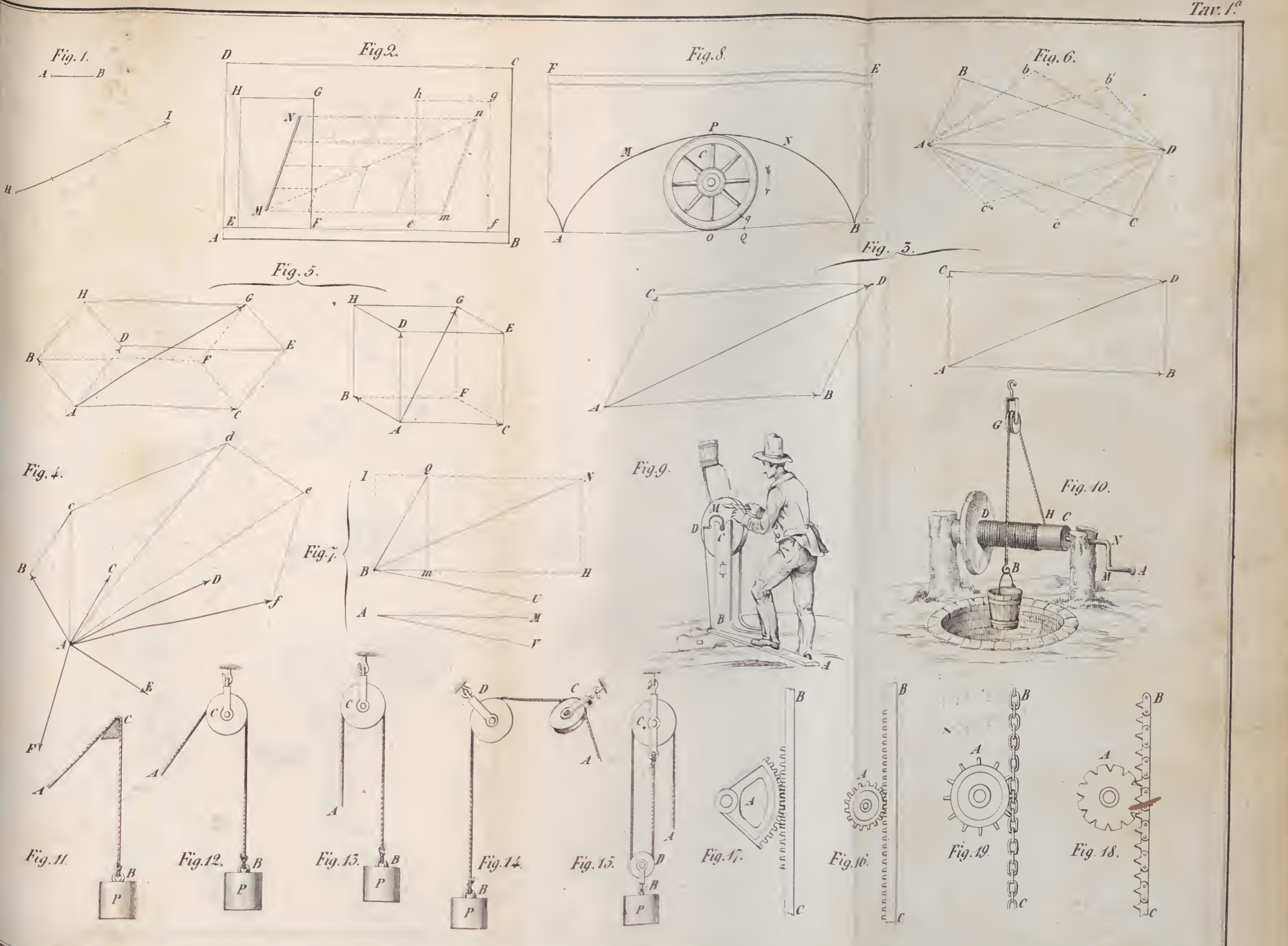
$$MM' : M'O :: BC : AC,$$

se ne conchiude, che la velocità della stanghetta sta a quella del cuneo come l'altezza di questo sta alla lunghezza del filo.

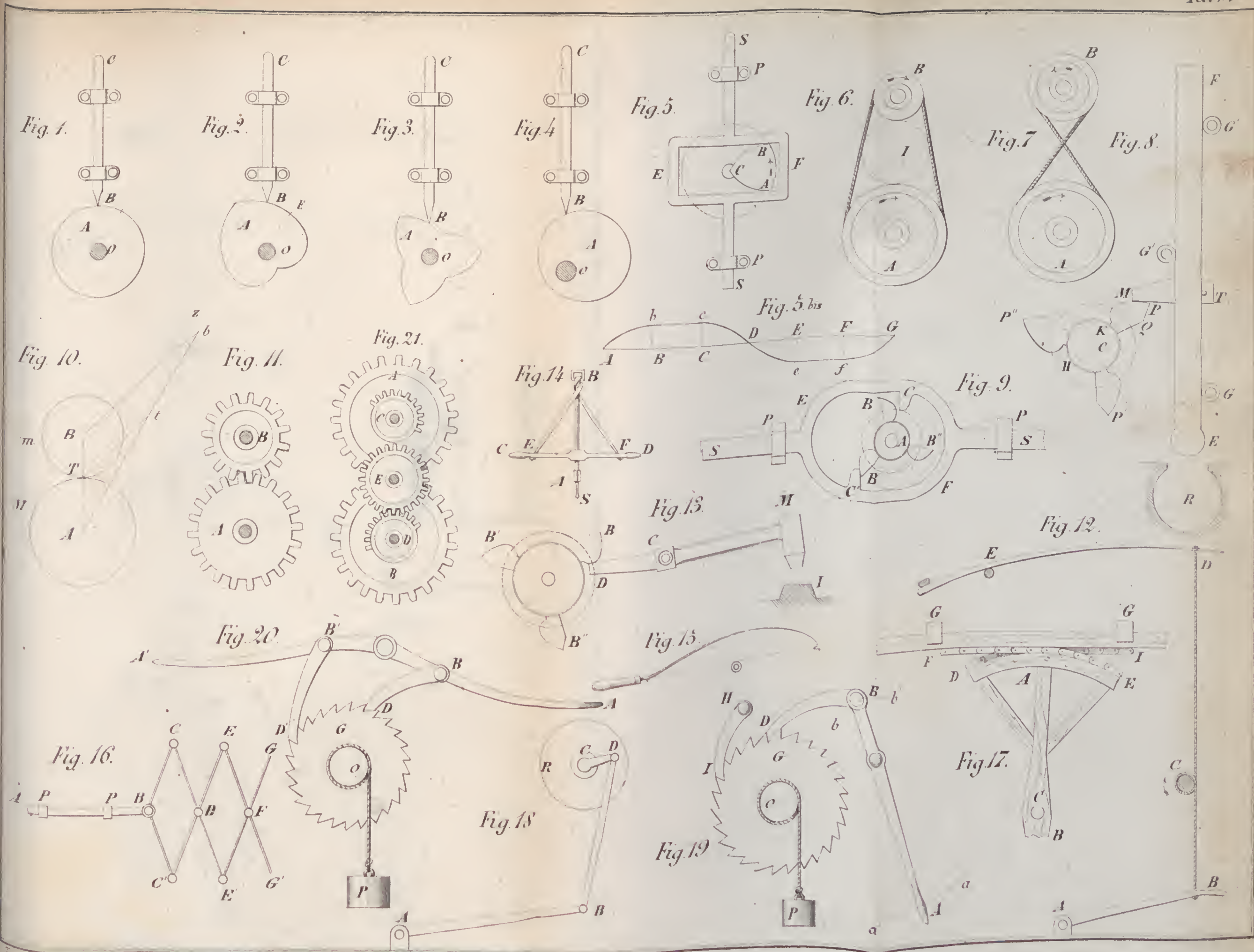
La medesima dimostrazione vale pei cunei di filo curvilineo, sostituendo alla curva del filo la tangente condotta a questa curva, nel punto in cui essa è toccata dalla punta della stanghetta.

Nel confrontare le cose dette nel presente capitolo con quelle che si contengono nel capitolo seguente, il lettore scorgerà da sè, che i cunei possono riguardarsi come *eccentrici*, ne'quali l'asse di rotazione sia infinitamente lontano dal filo.

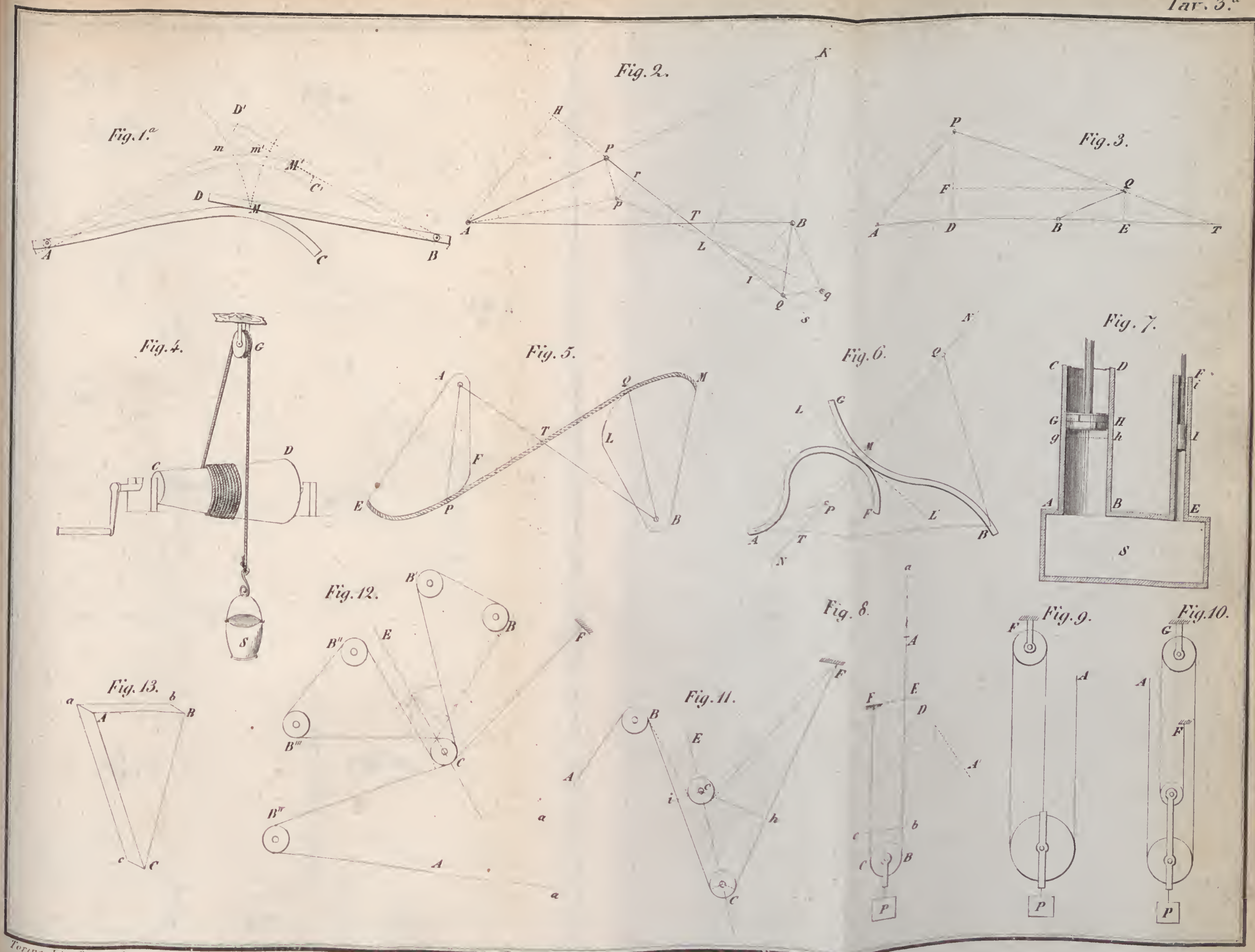
FINE.



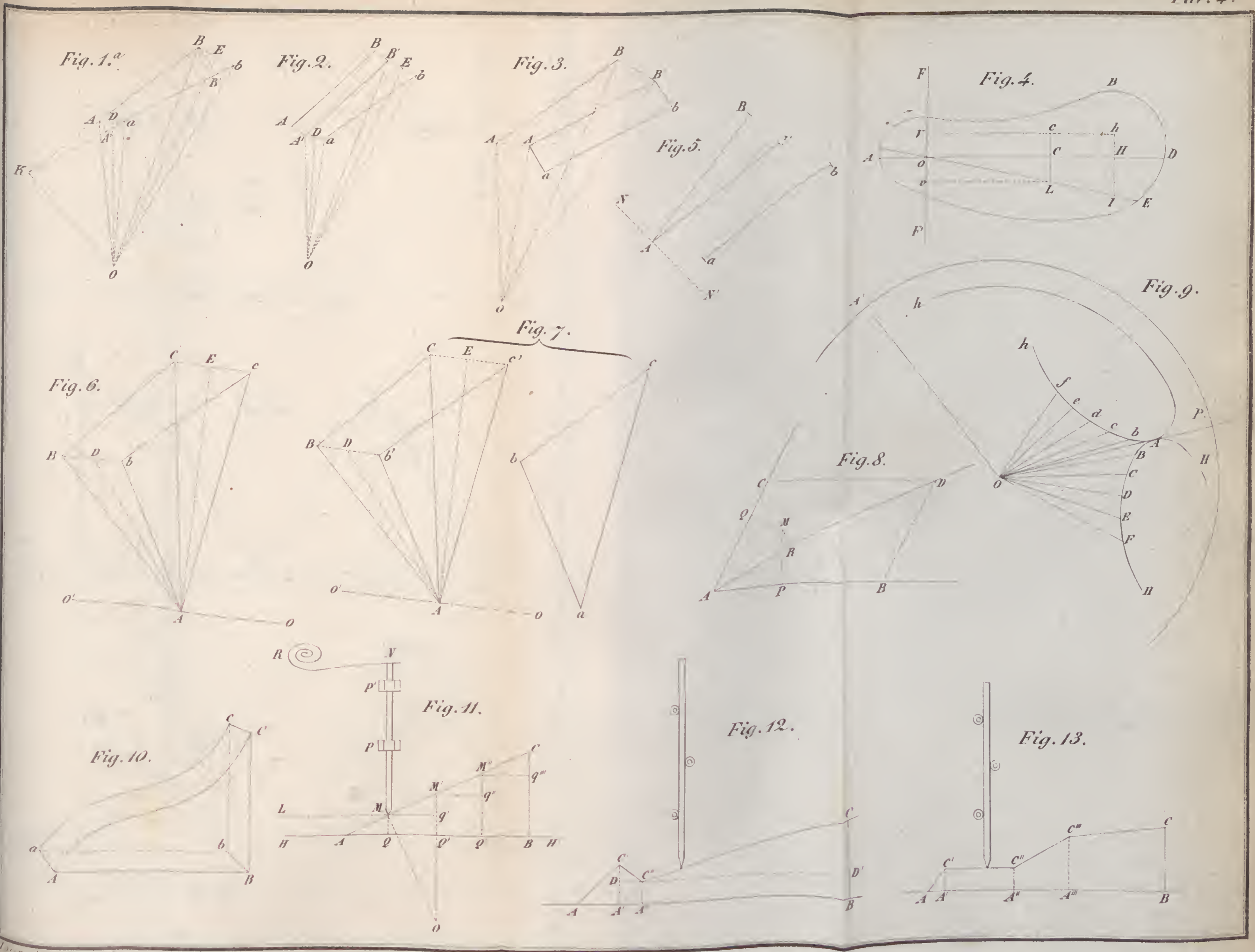

Torino. Lit. Reycend



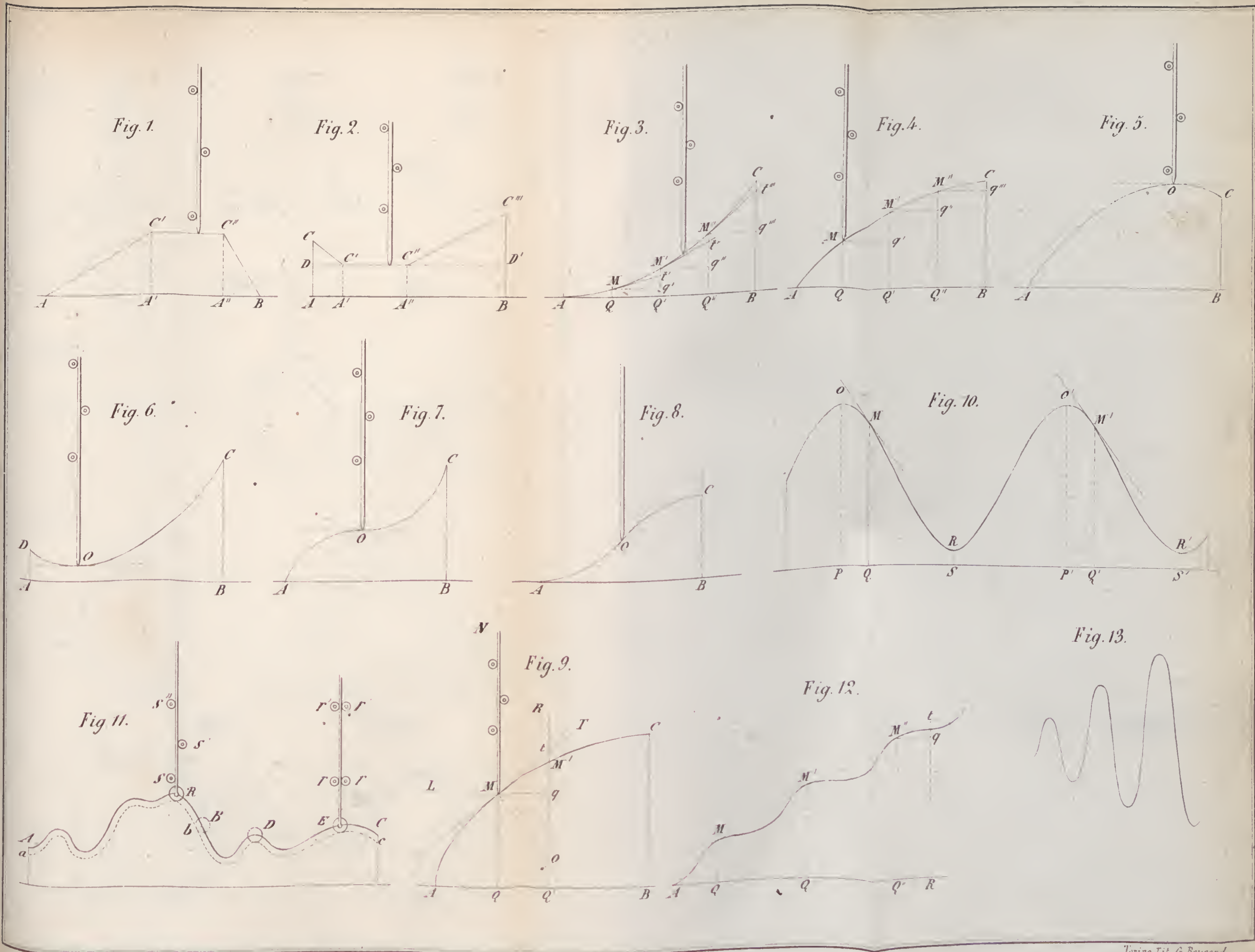

Torino Lit. Reycend




Torino Lit. Reycend




Torino Lit. G. Reycend




Torino. Lit. G. Reycend

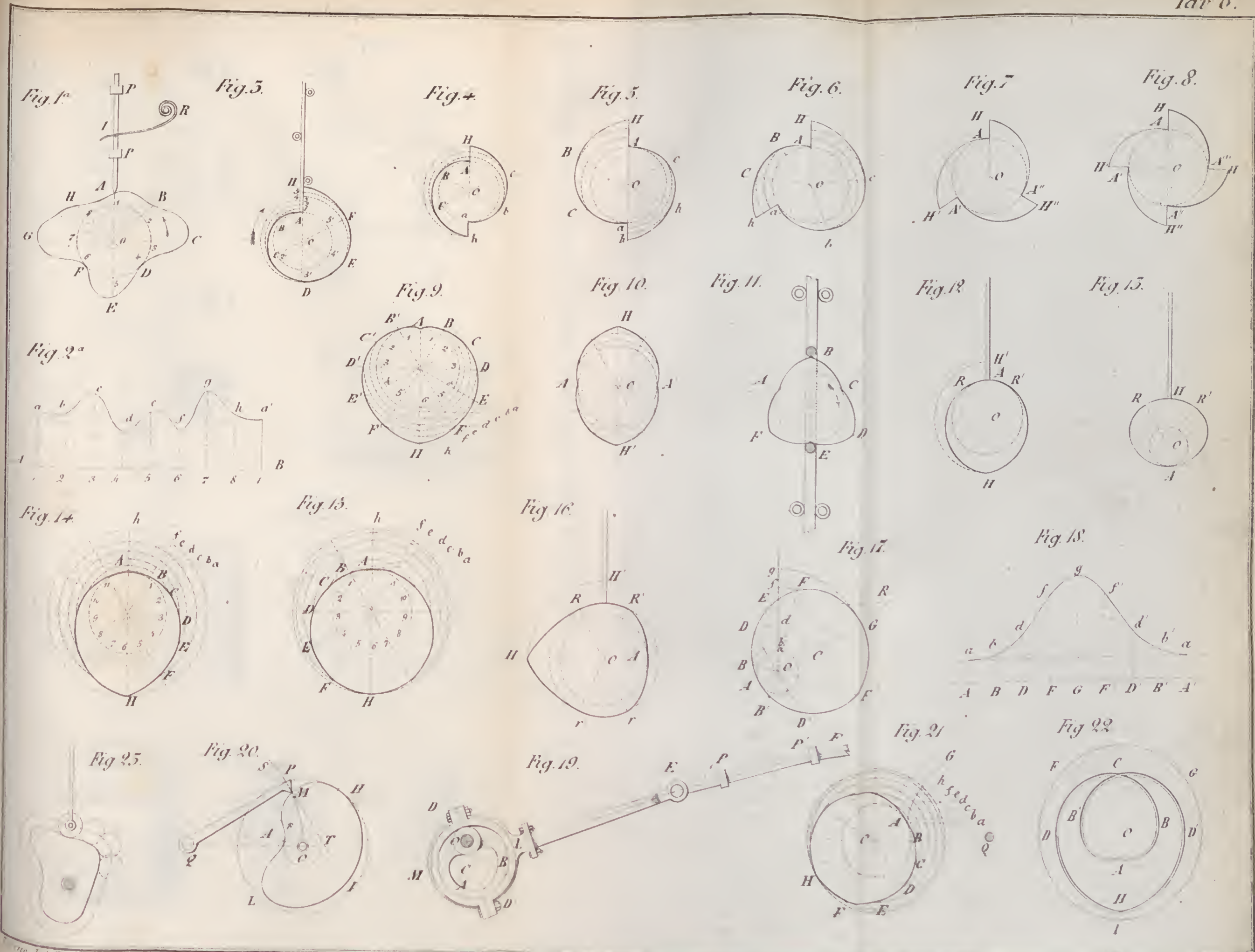
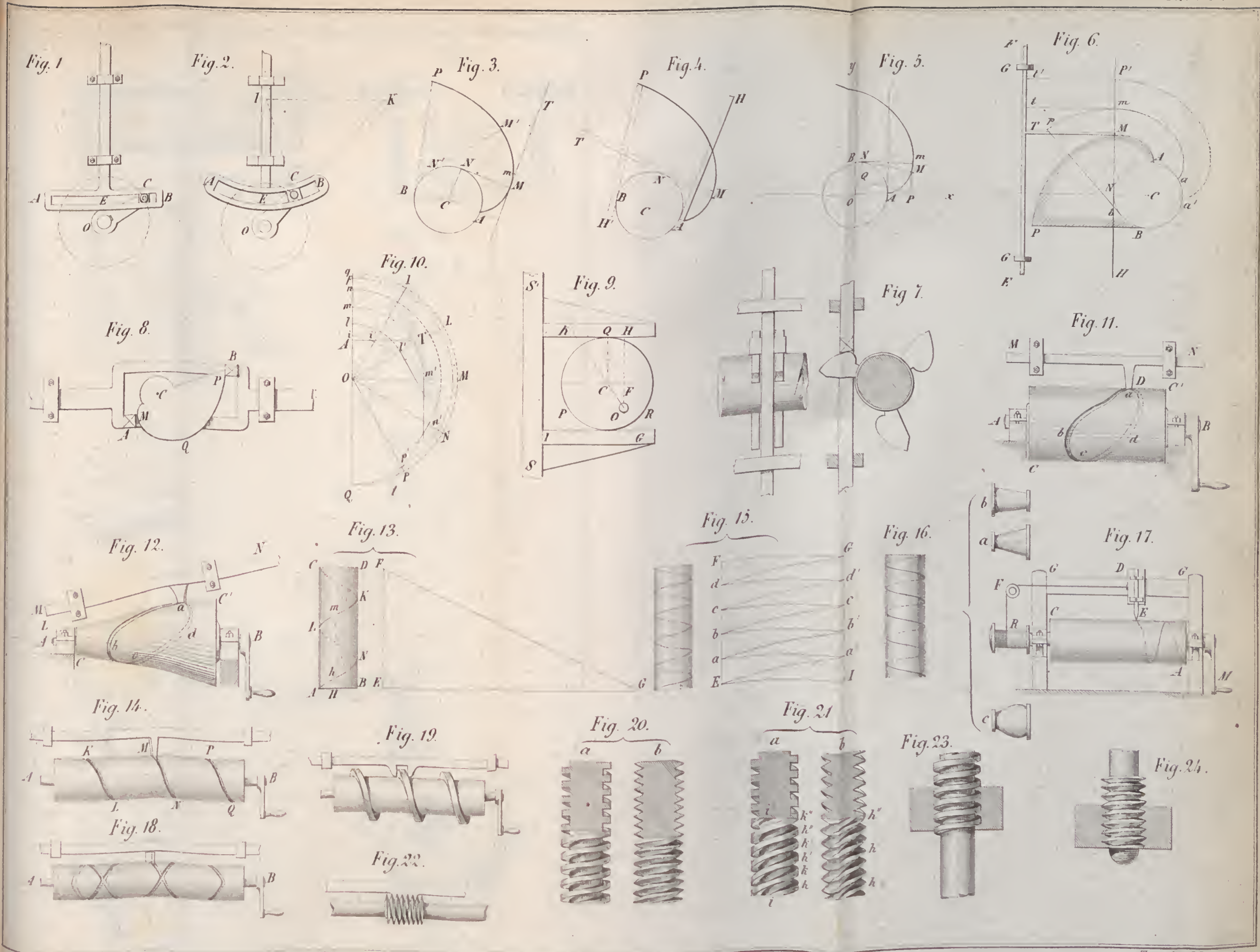
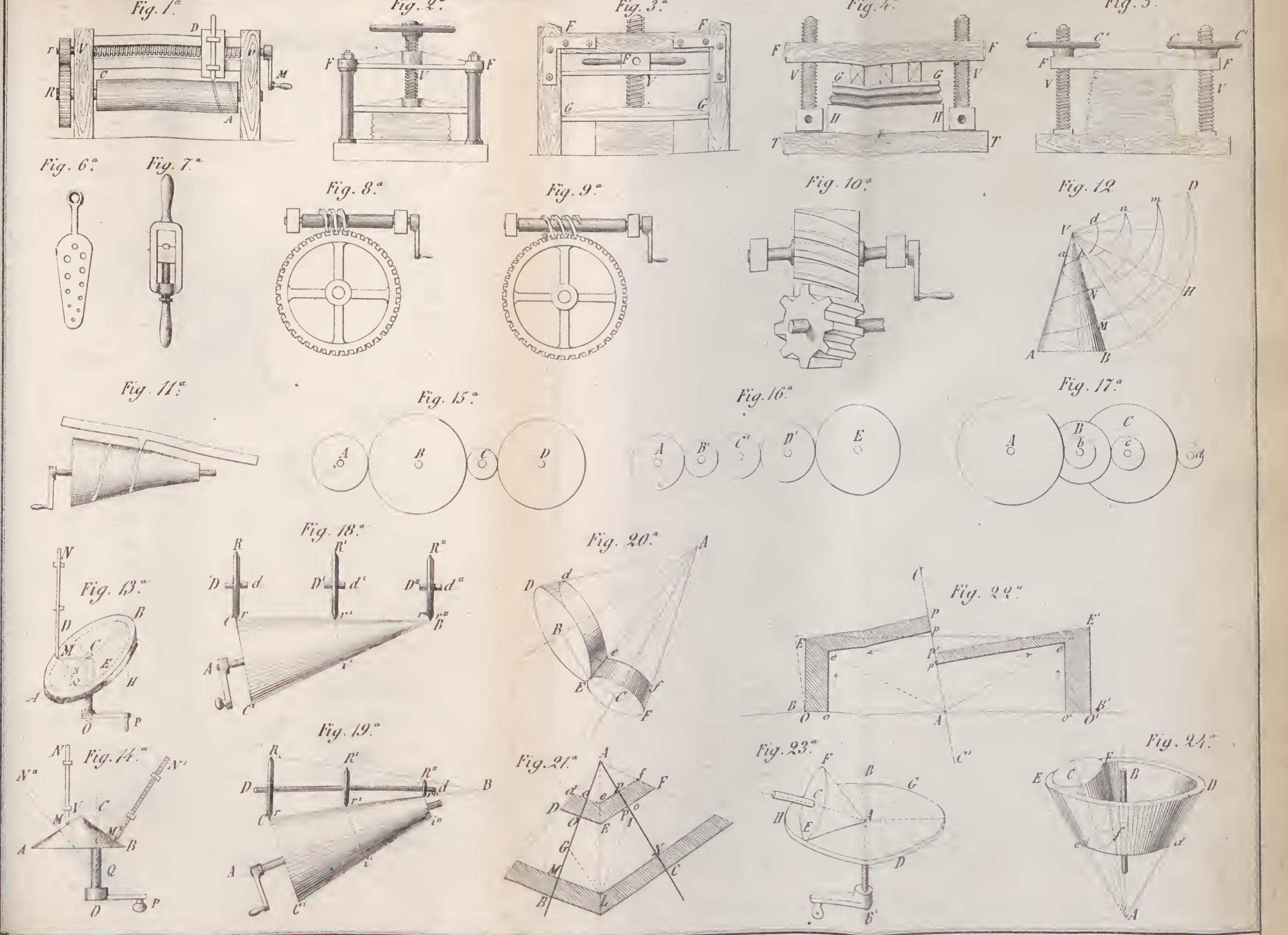


Fig. 1ª
Fig. 2ª
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23.

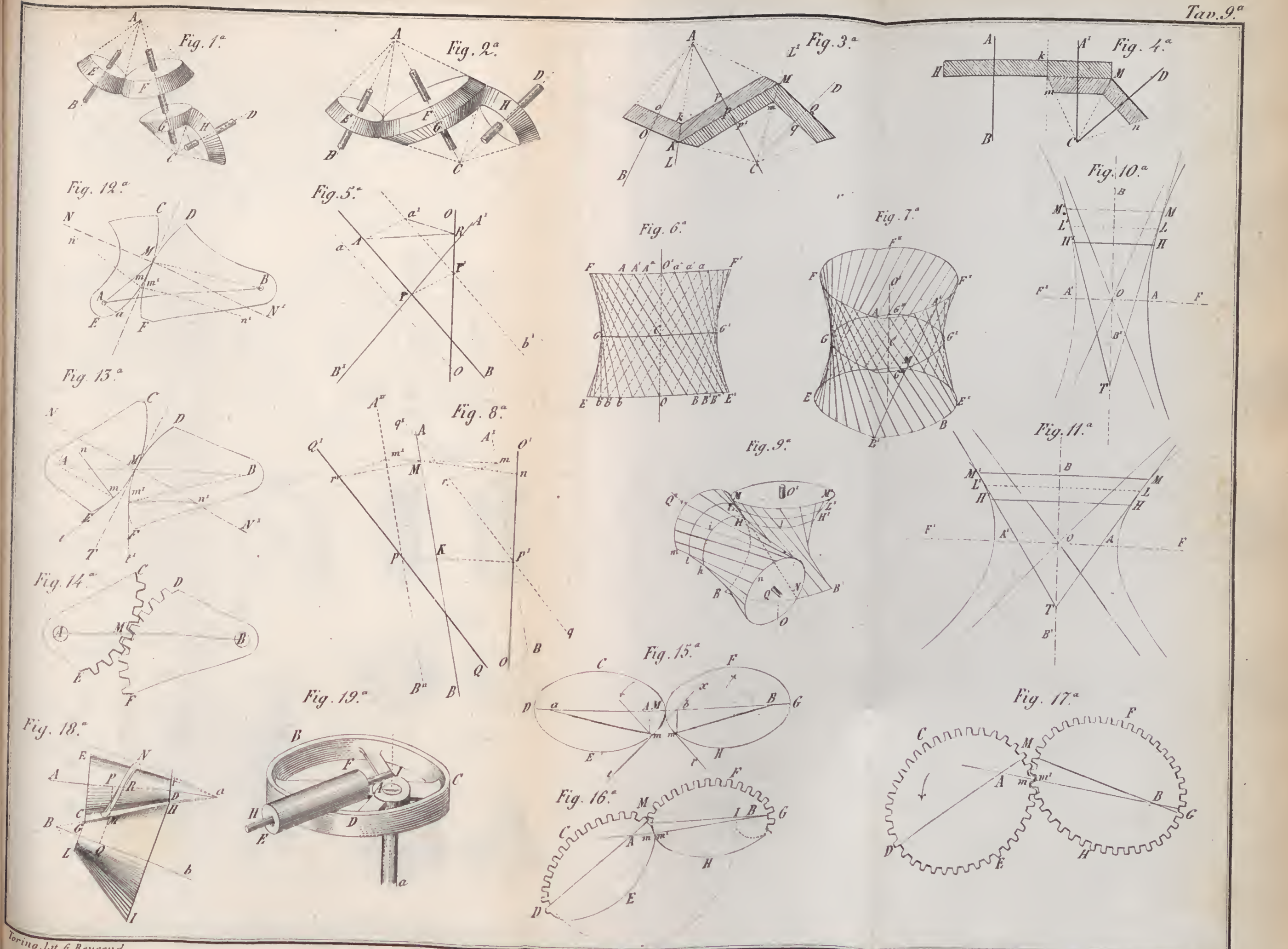
Lit. Reycend



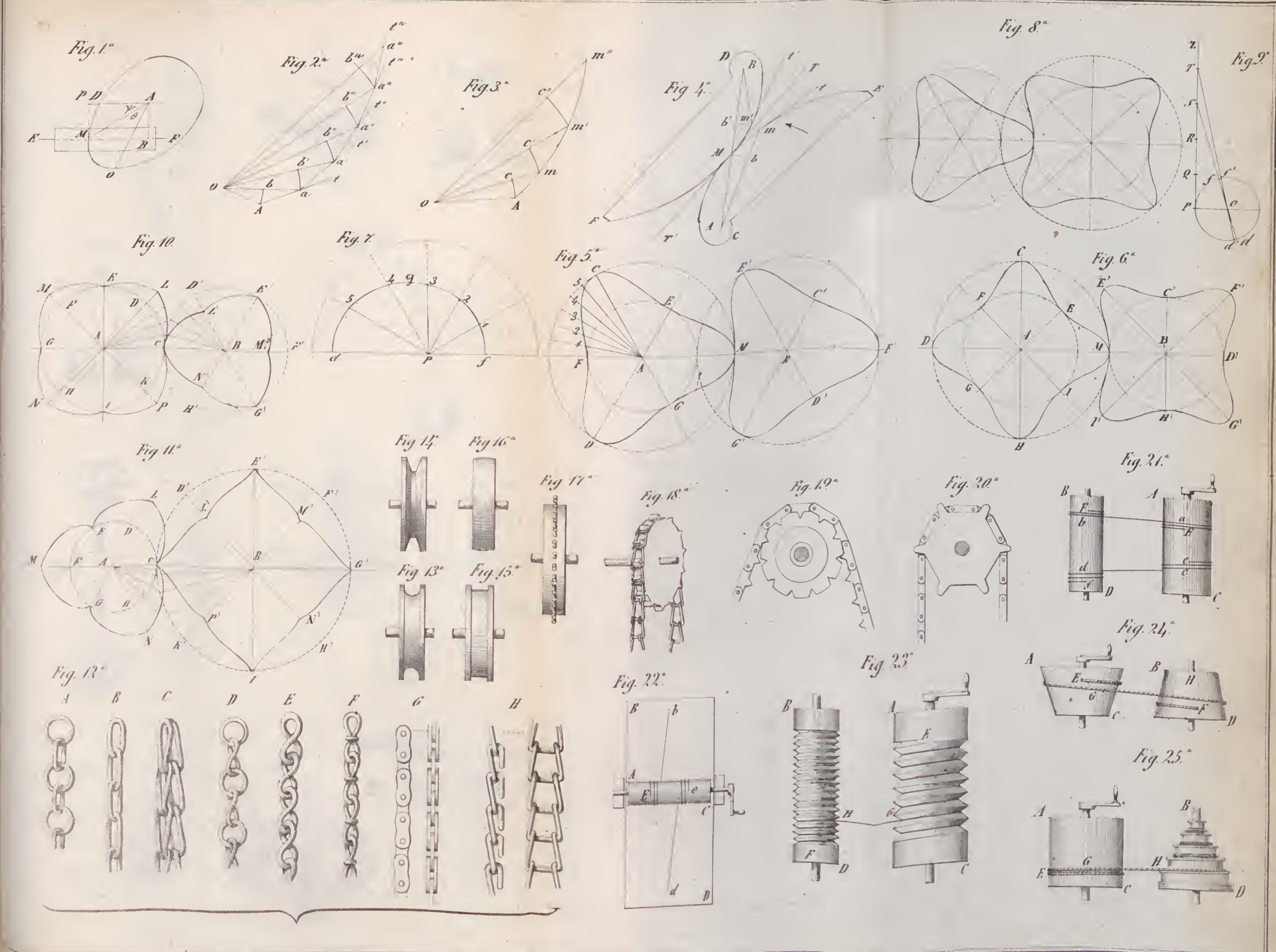

Torino Lit. G Reycend



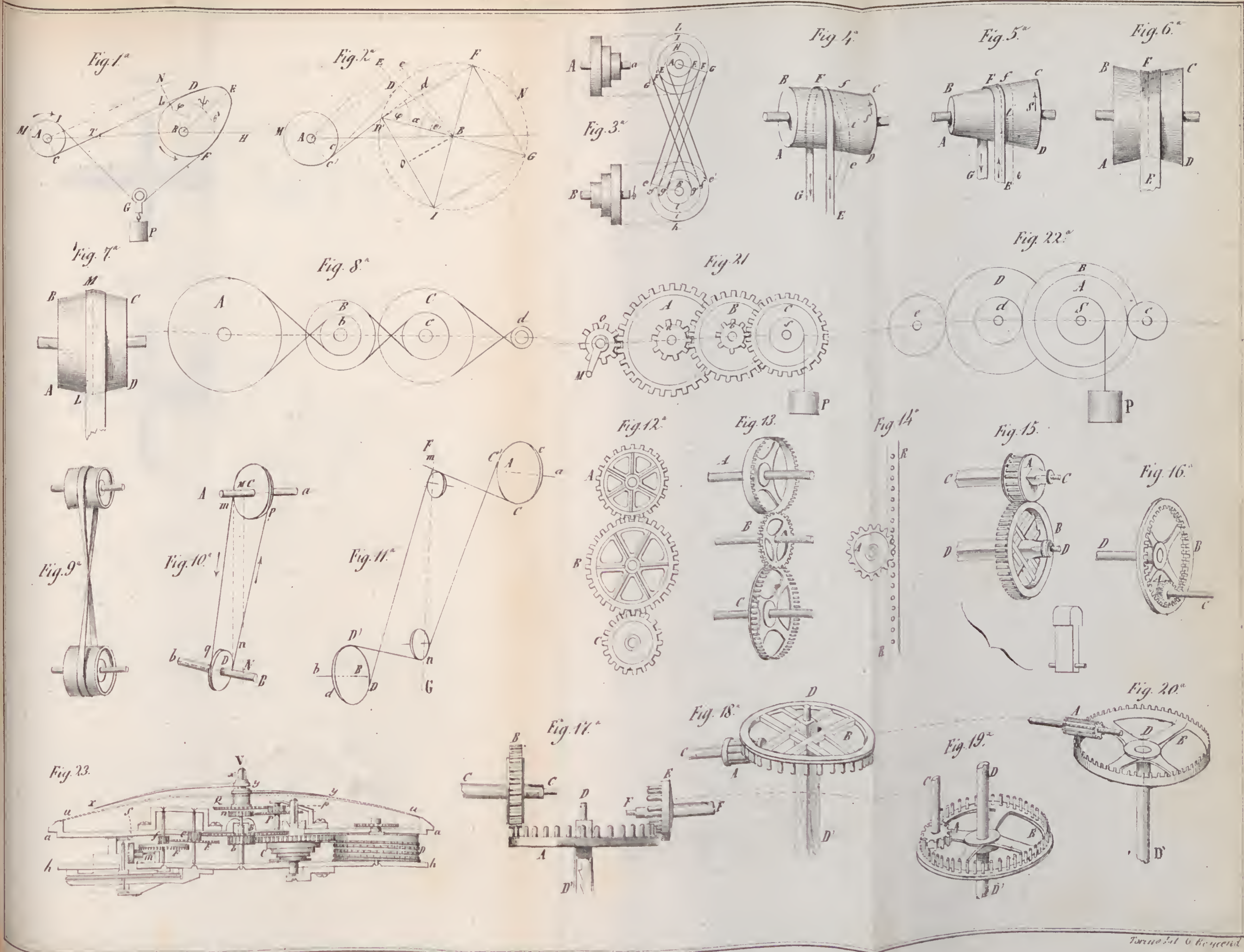

Torino. Lit G. Reycend.




Torino, Lit. G. Reycend.




Torino Lit. G. Reycend




Torino Lit. G. Doyen

Fig. 1.ª

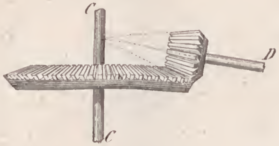


Fig. 3.ª

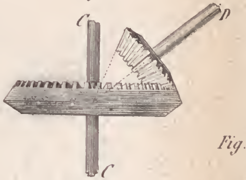


Fig. 2.ª

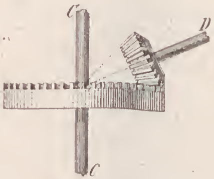


Fig. 4.ª

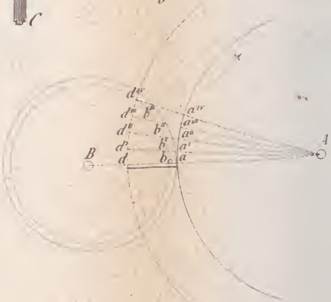


Fig. 6.ª

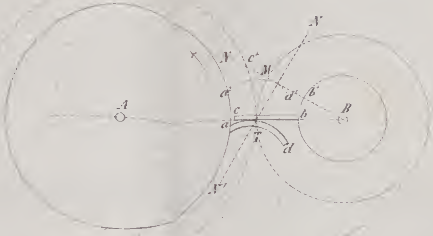


Fig. 5.ª

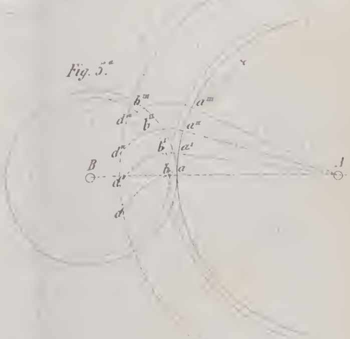


Fig. 8.ª

Fig. 9.ª

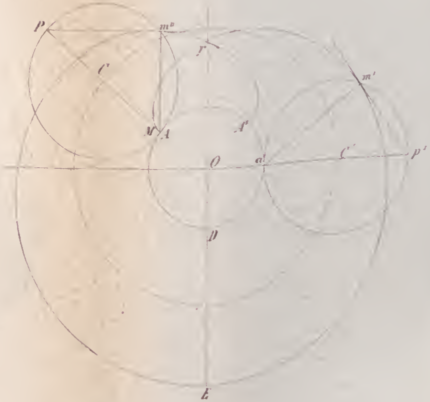
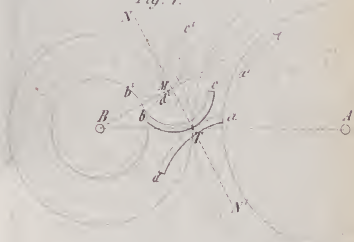


Fig. 7.ª



ino, Lit. G. Reycend.

Fig. 3.a

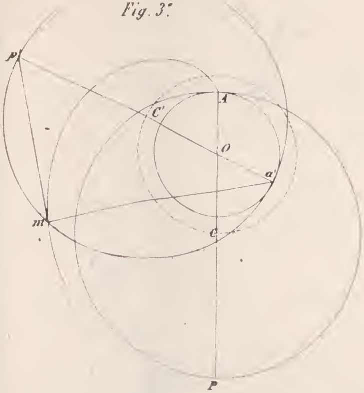



Fig. 1.a

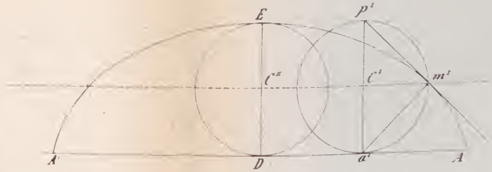



Fig. 6.a

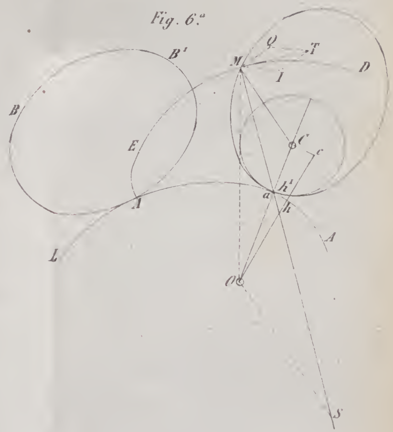



Fig. 5.a

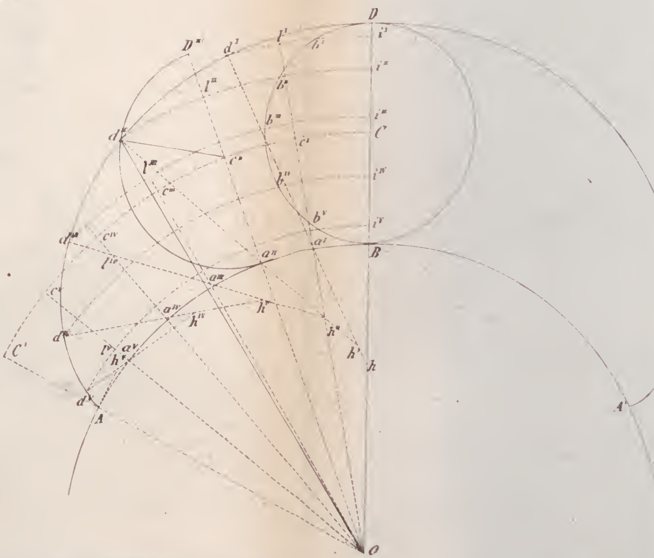
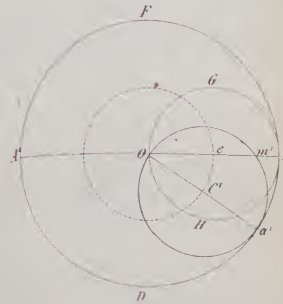
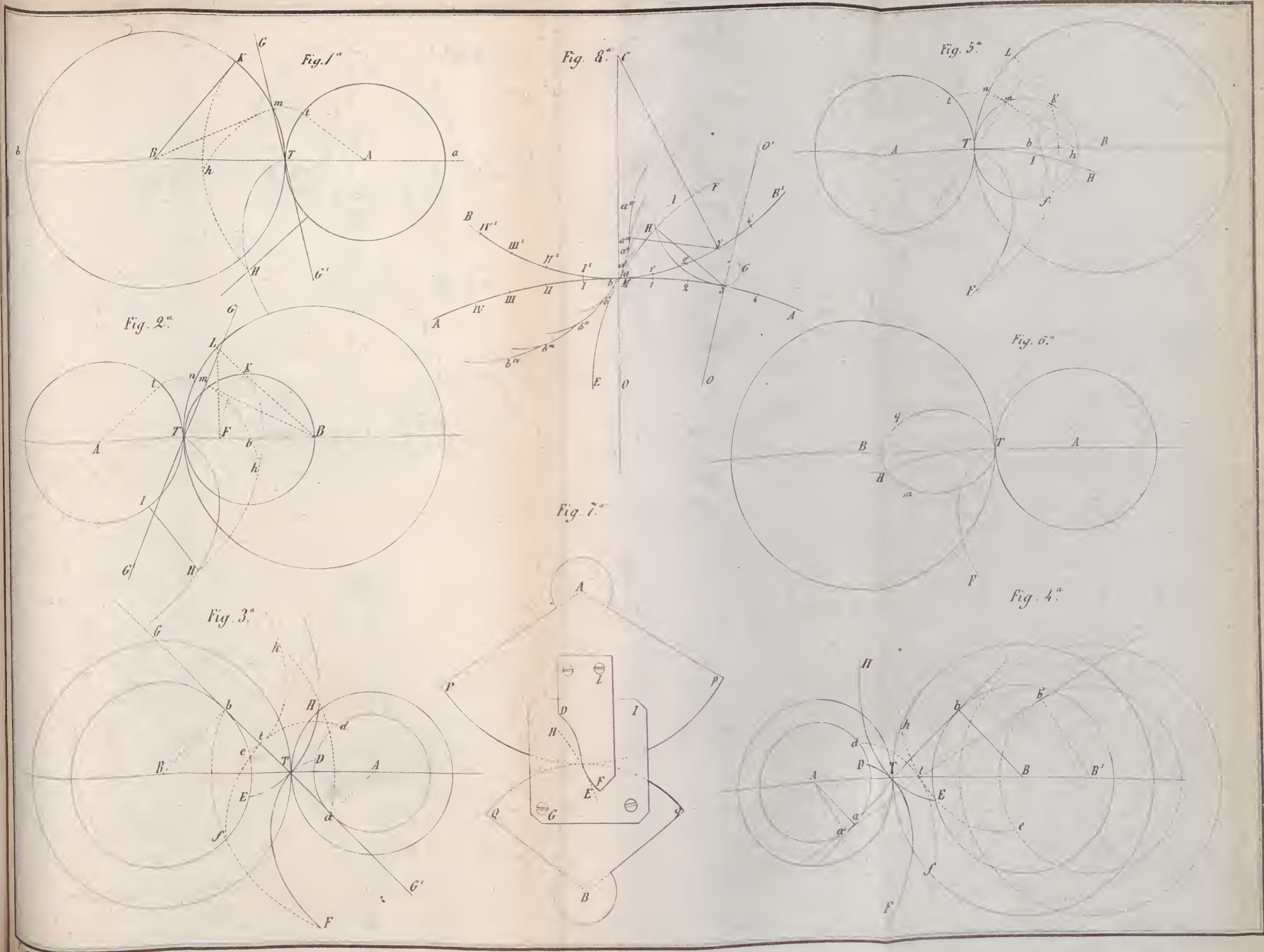



Fig. 4.a


Fig. 2.a




...no . Lit. G. Reycend




Torino, Lit. G. Reycend

Fig. 1.ª

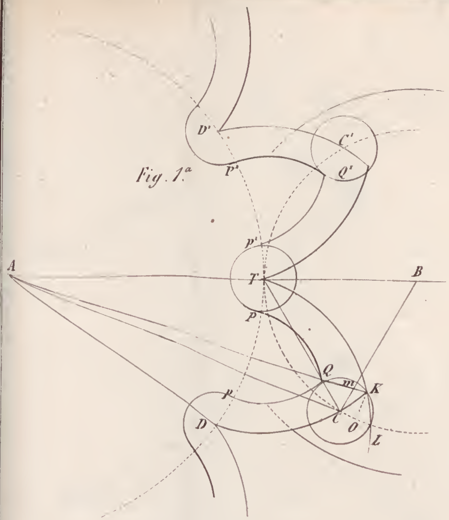



Fig. 2.ª

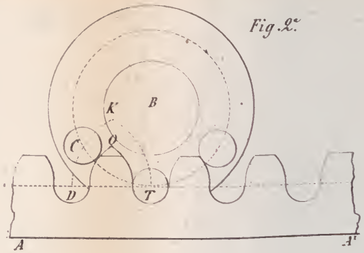



Fig. 3.ª

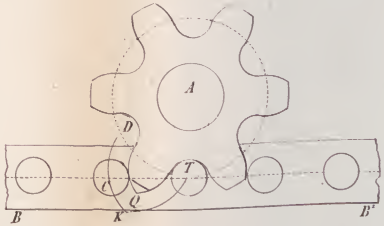



Fig. 4.ª

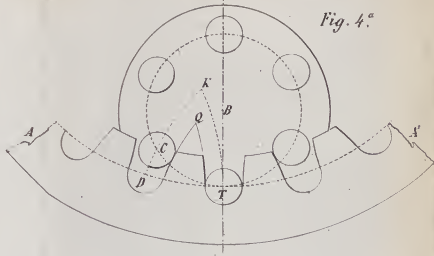



Fig. 5.ª

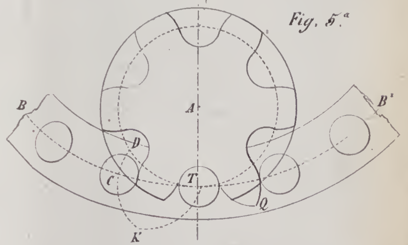



Fig. 6.ª

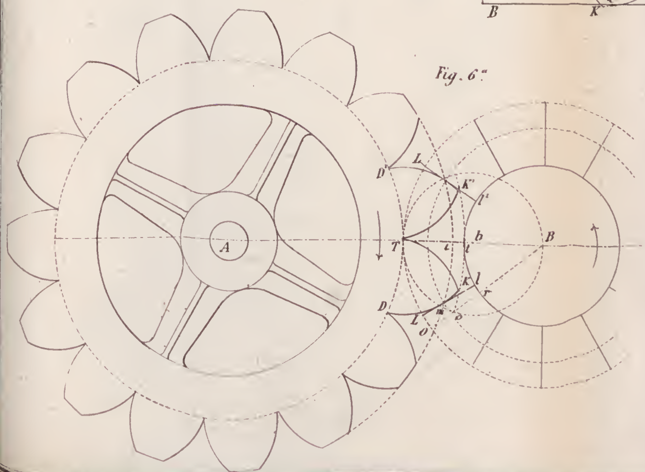



Fig. 7.ª

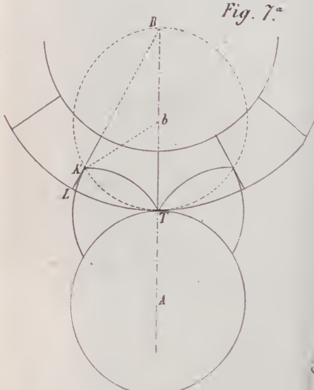
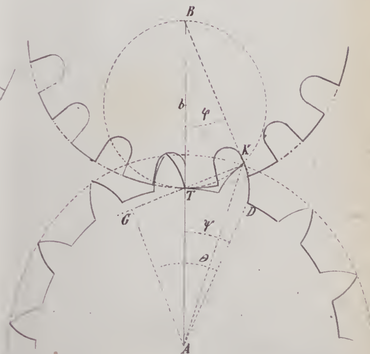
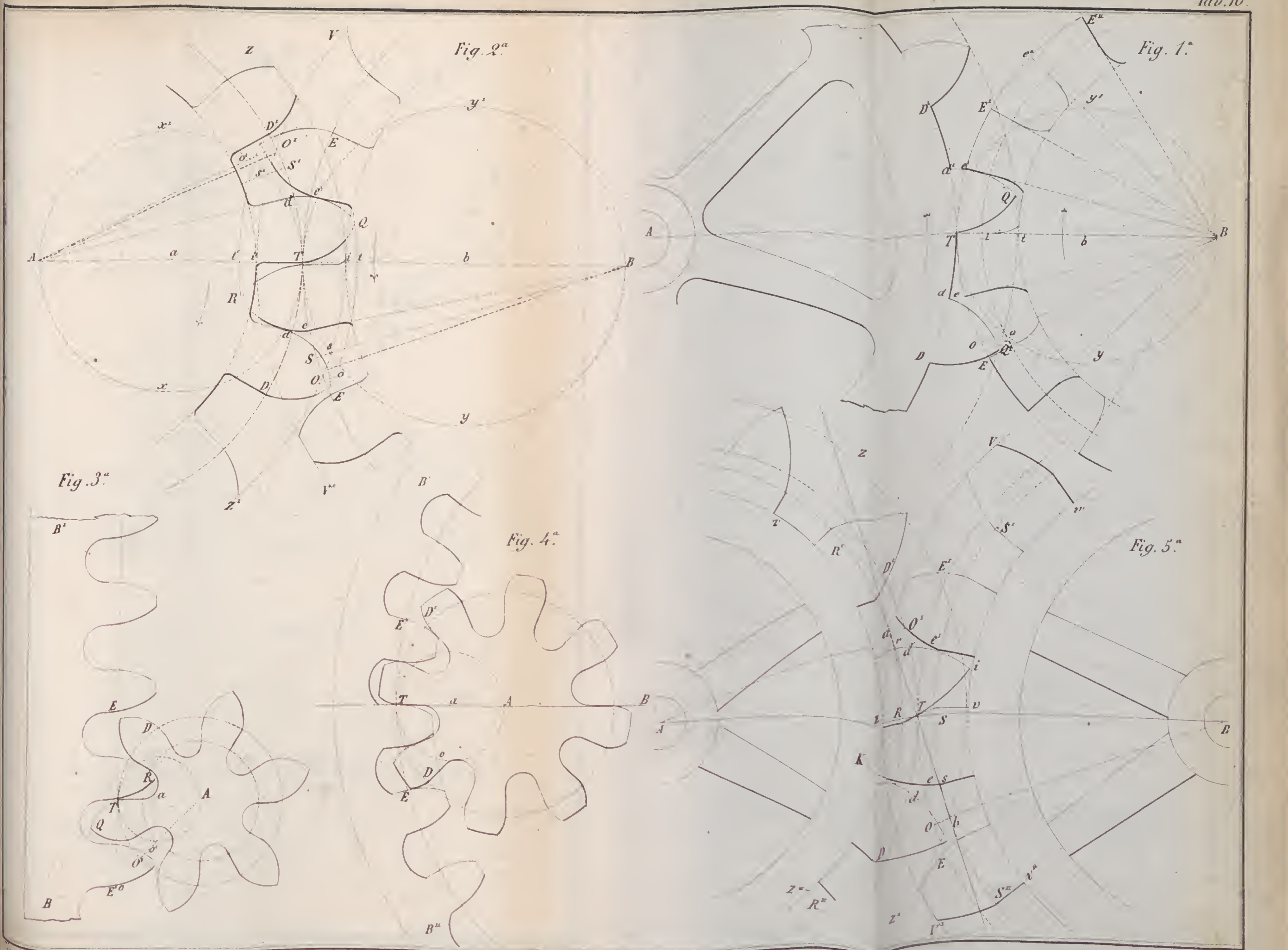



Fig. 8.ª




Torino, Lit. G. Reycend




…rino, Lit. Gᵉ Reycend

Fig. 1.a

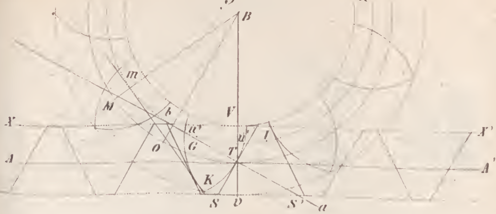


Fig. 2.a

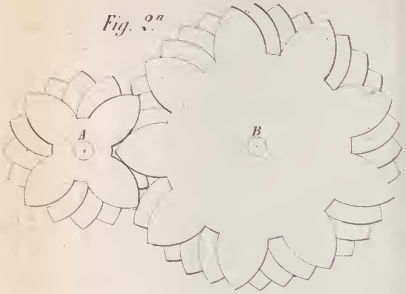


Fig. 3.a

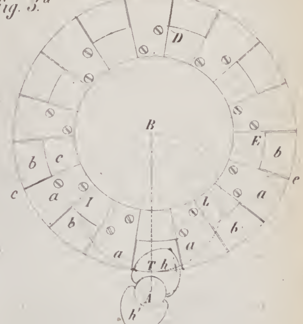


Fig. 4.a

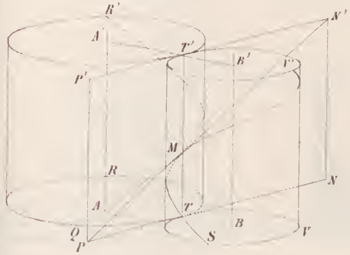


Fig. 5.a

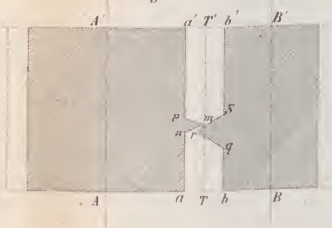


Fig. 6.a

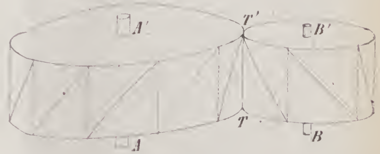


Fig. 7.a

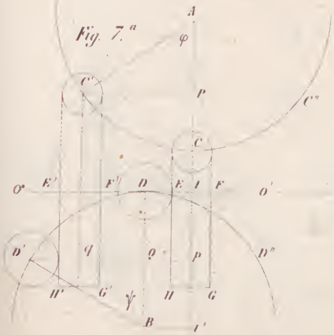


Fig. 8.a

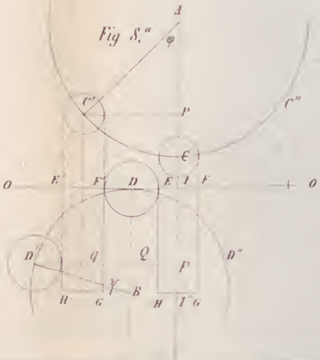
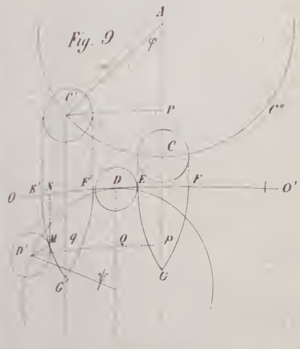


Fig. 9



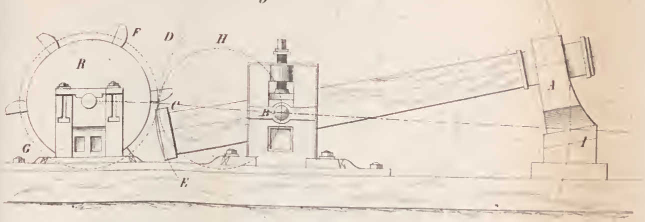



Fig. 1.a

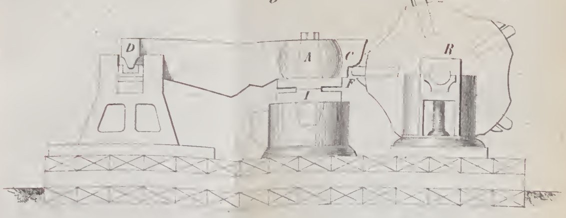



Fig. 2.a

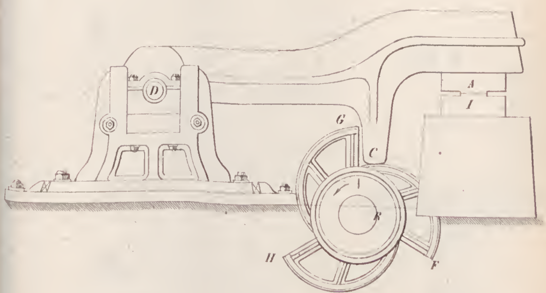



Fig. 3.a

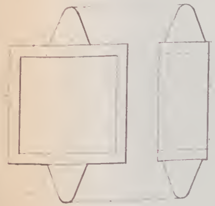


Fig. 6.a

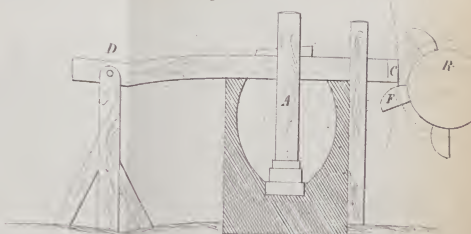



Fig. 7.a

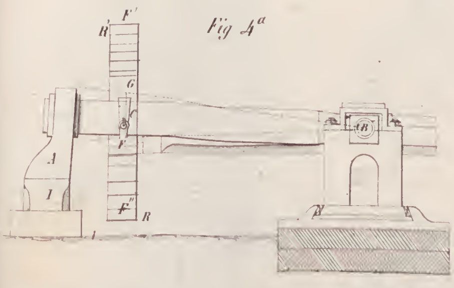



Fig. 4.a

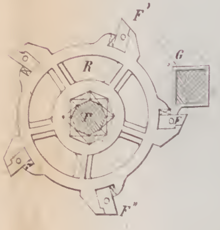



Fig. 5.a

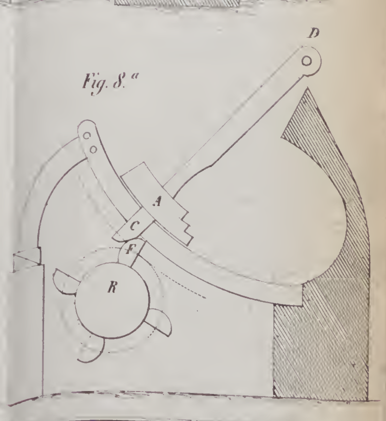



Fig. 8.a

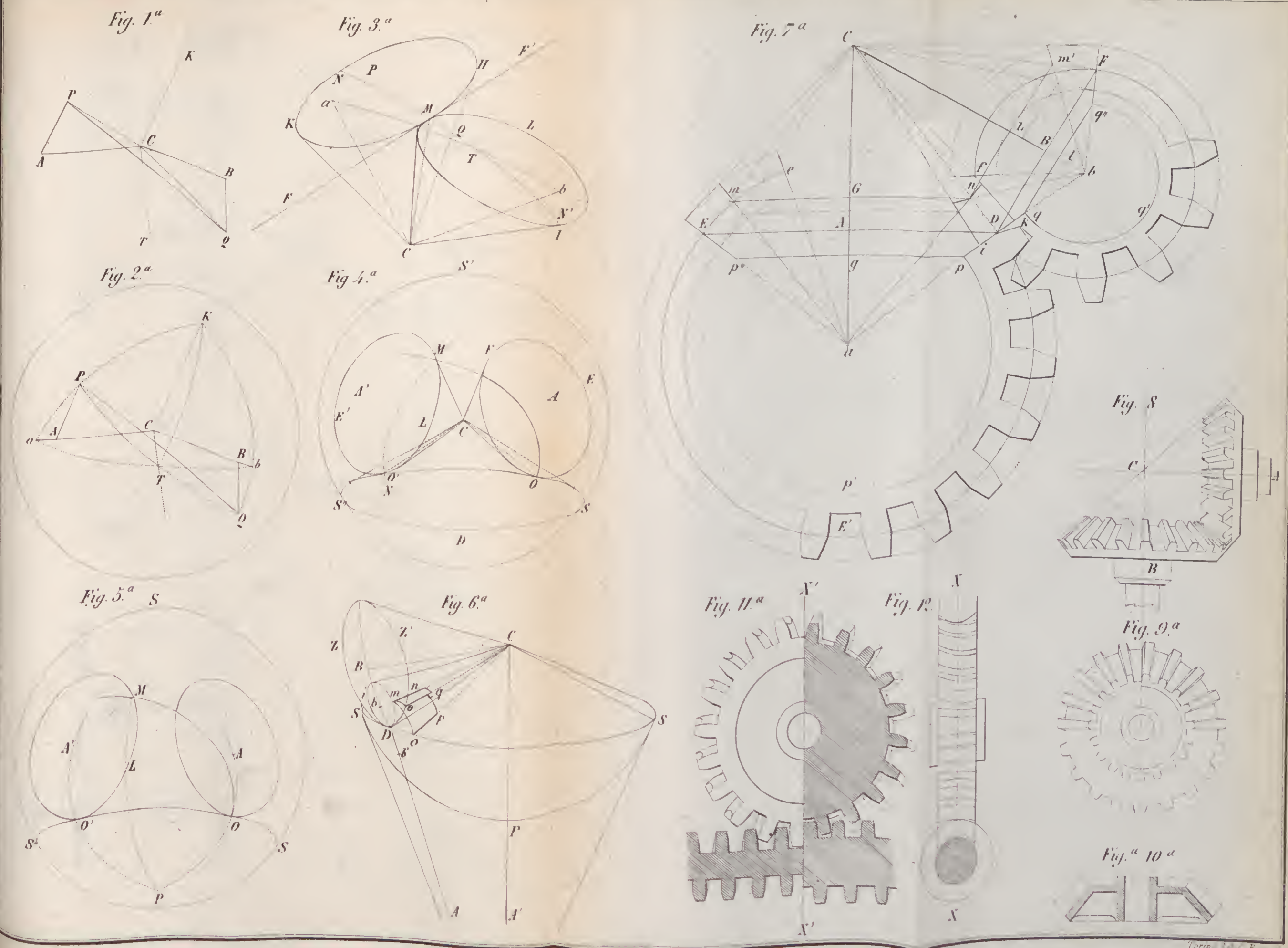
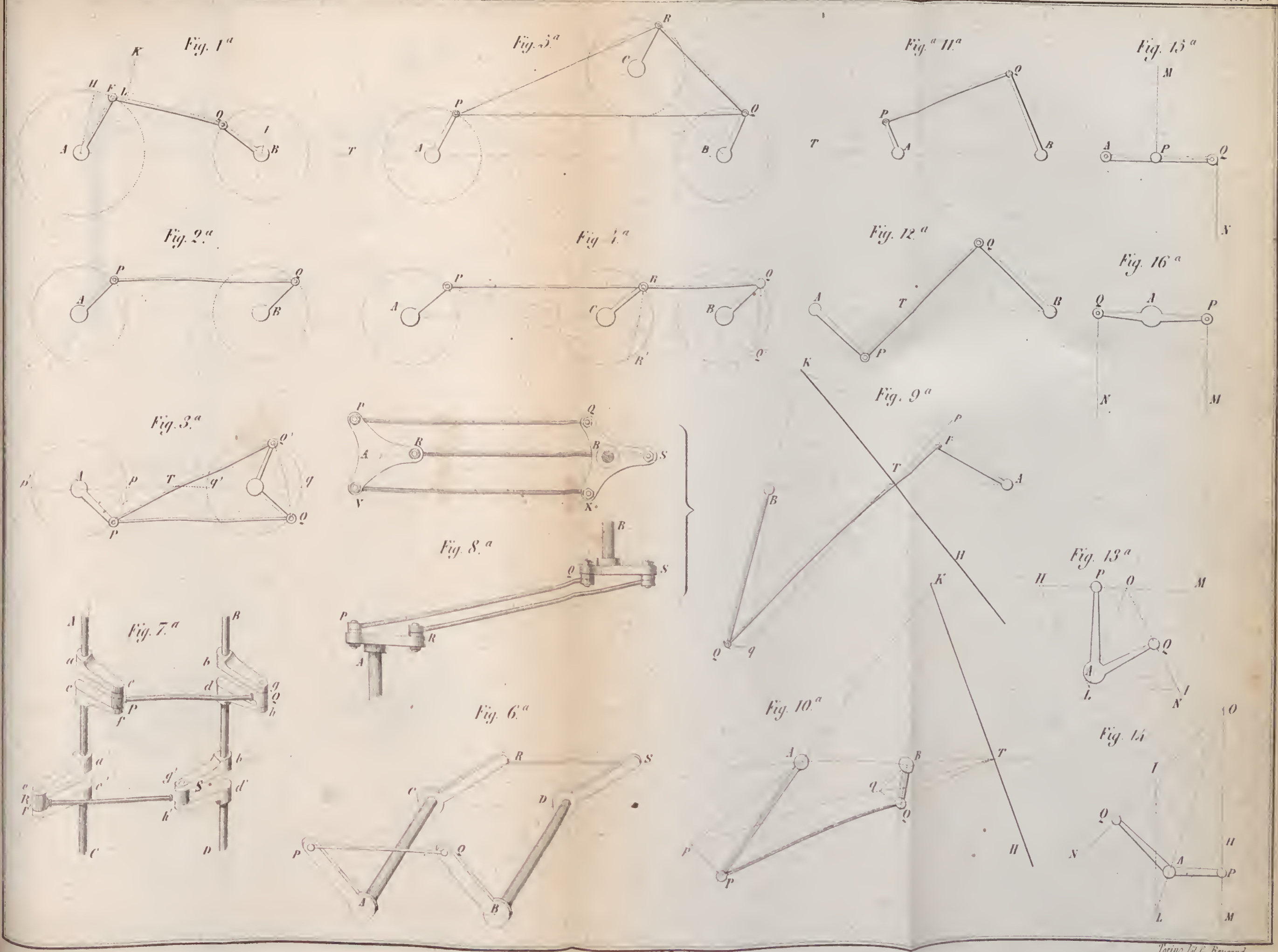


Fig. 1.ª
Fig. 2.ª
Fig. 3.ª
Fig. 4.ª
Fig. 5.ª
Fig. 6.ª
Fig. 7.ª
Fig. 8
Fig. 9.ª
Fig.ª 10.ª
Fig. 11.ª
Fig. 12.




Torino Lit. C. Reycend

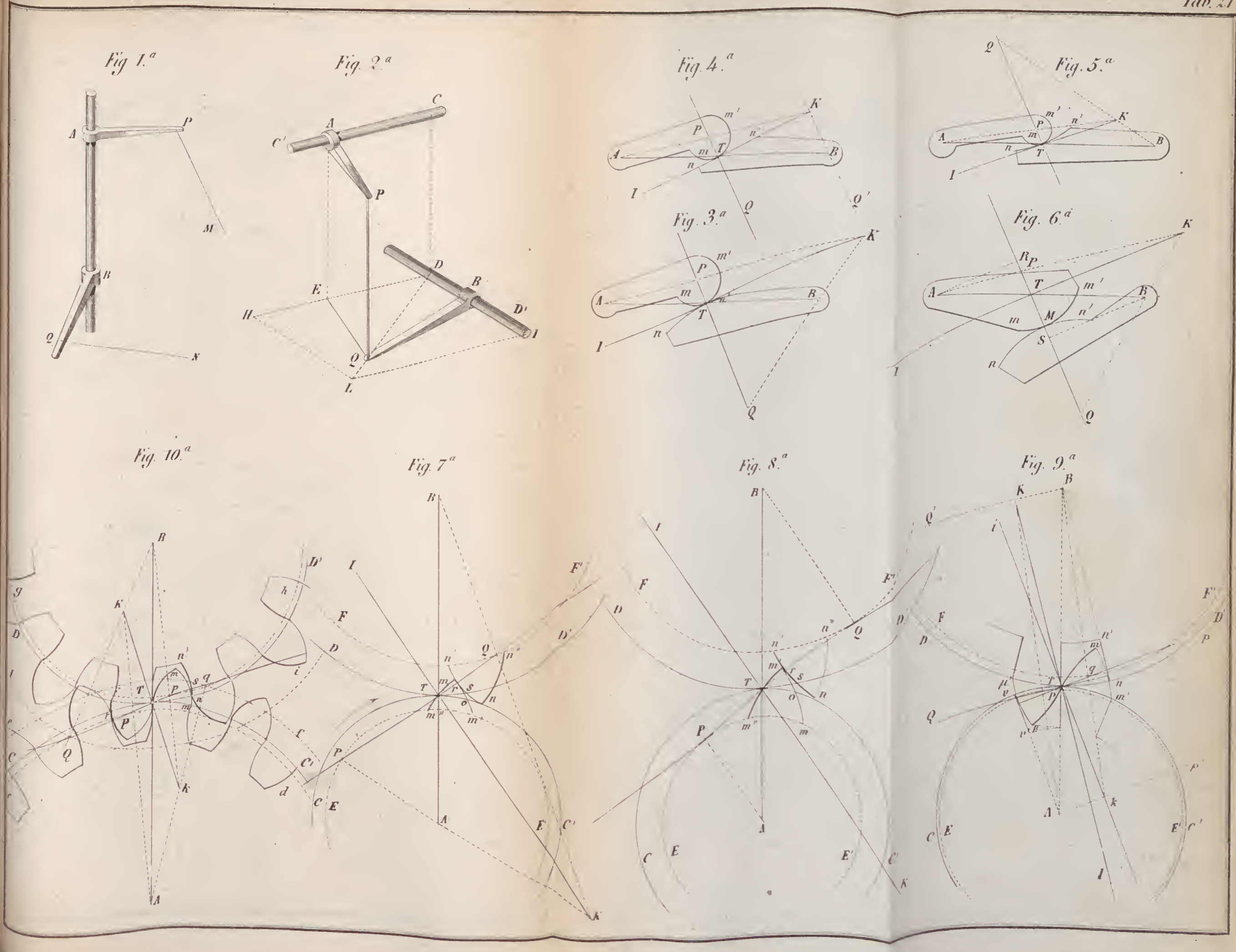


Fig 1.a
Fig. 2.a
Fig. 4.a
Fig. 5.a
Fig. 3.a
Fig. 6.a
Fig. 10.a
Fig. 7.a
Fig. 8.a
Fig. 9.a

Fig. 1.a

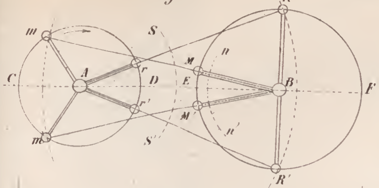



Fig. 2.a

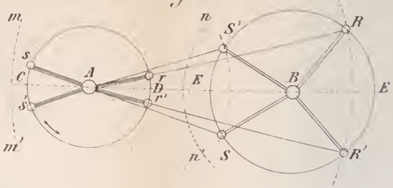



Fig. 3.a

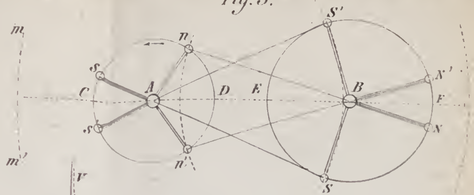



Fig 1.a bis

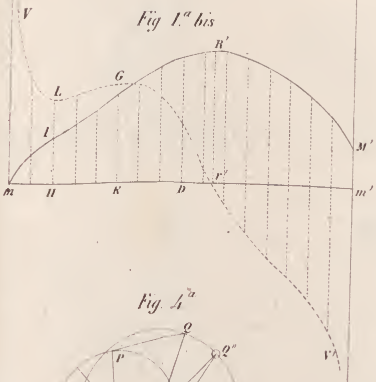



Fig.a 2 bis

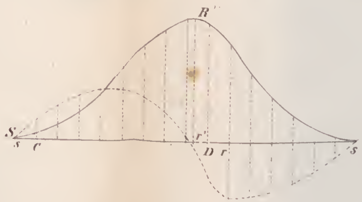



Fig. 3a bis

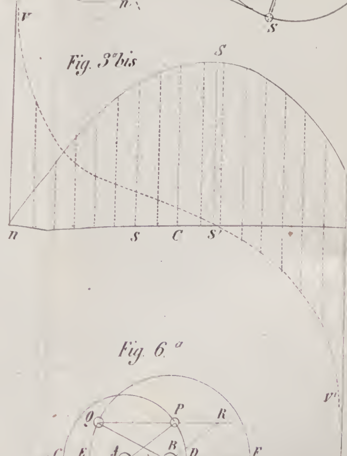



Fig. 4.a

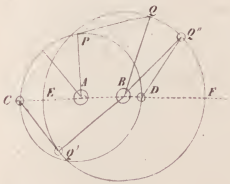



Fig. 5.a

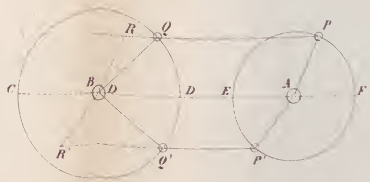



Fig. 6.a

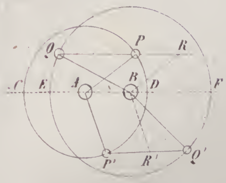



Fig. 7.a

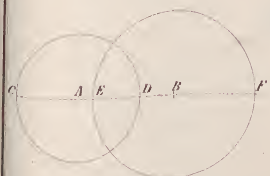



Fig. 8.a

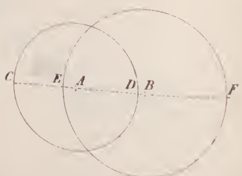



Fig. 9.a


Fig.a 10.a

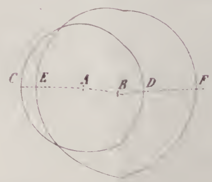
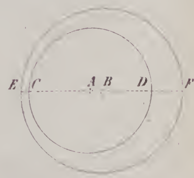
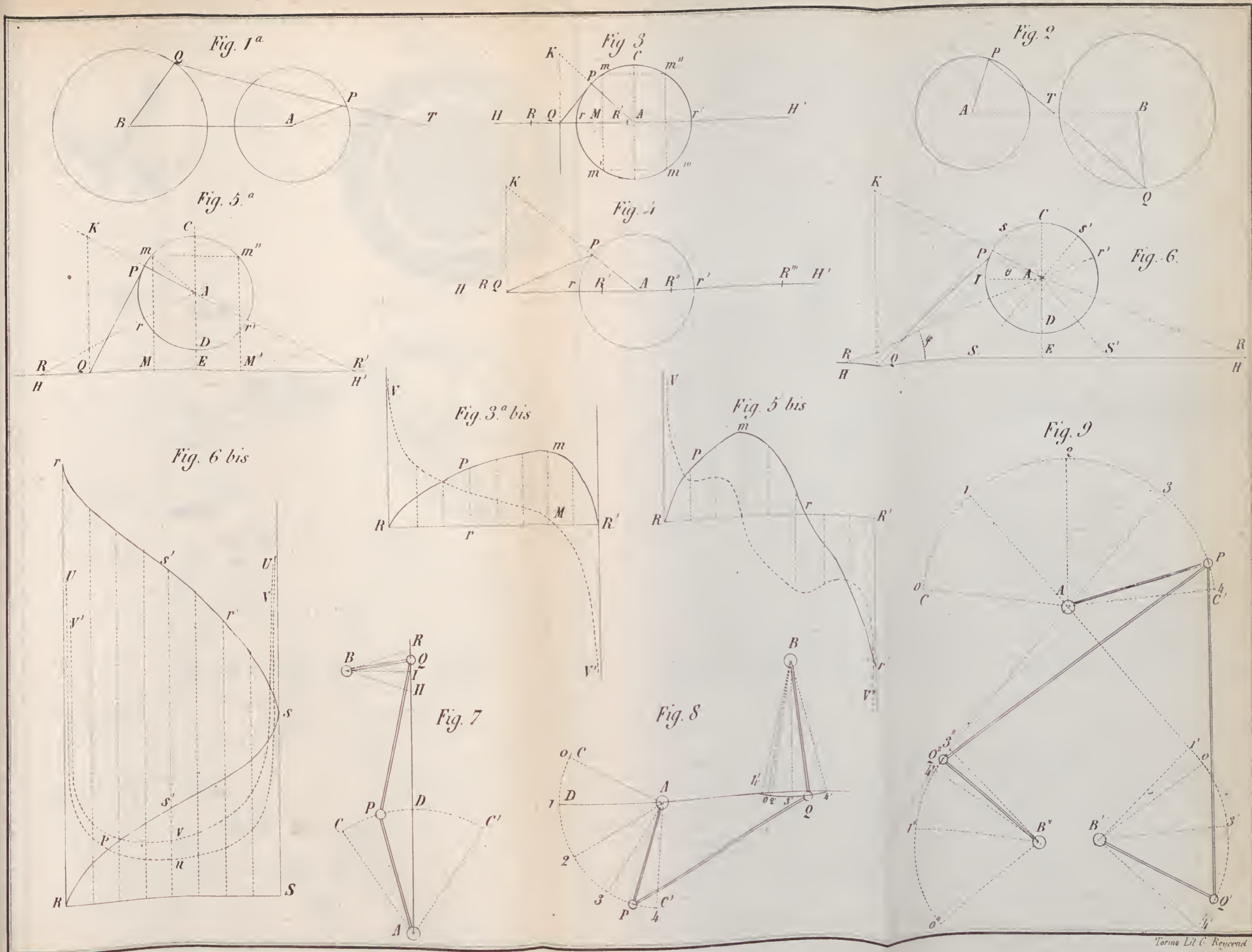
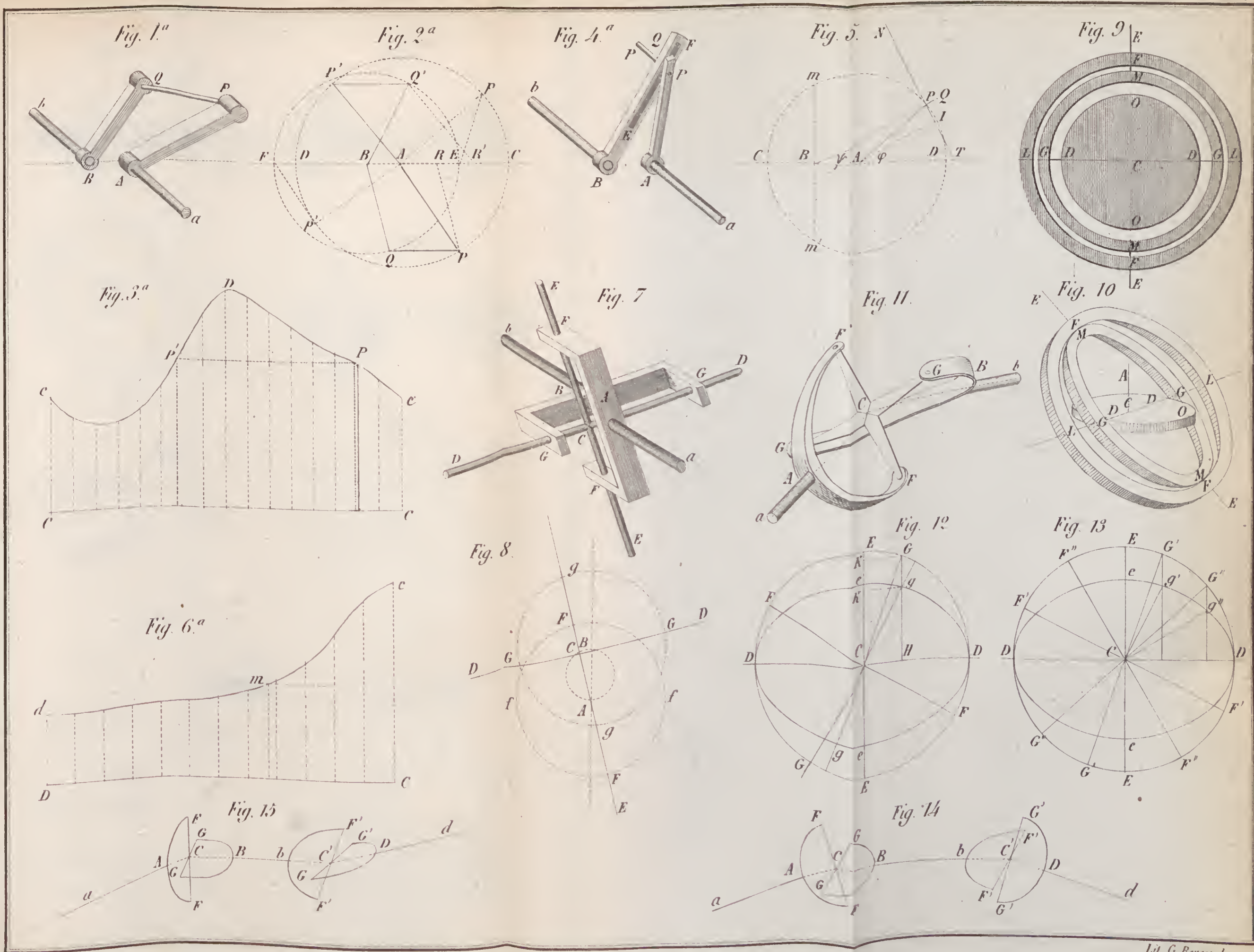



Fig. 11

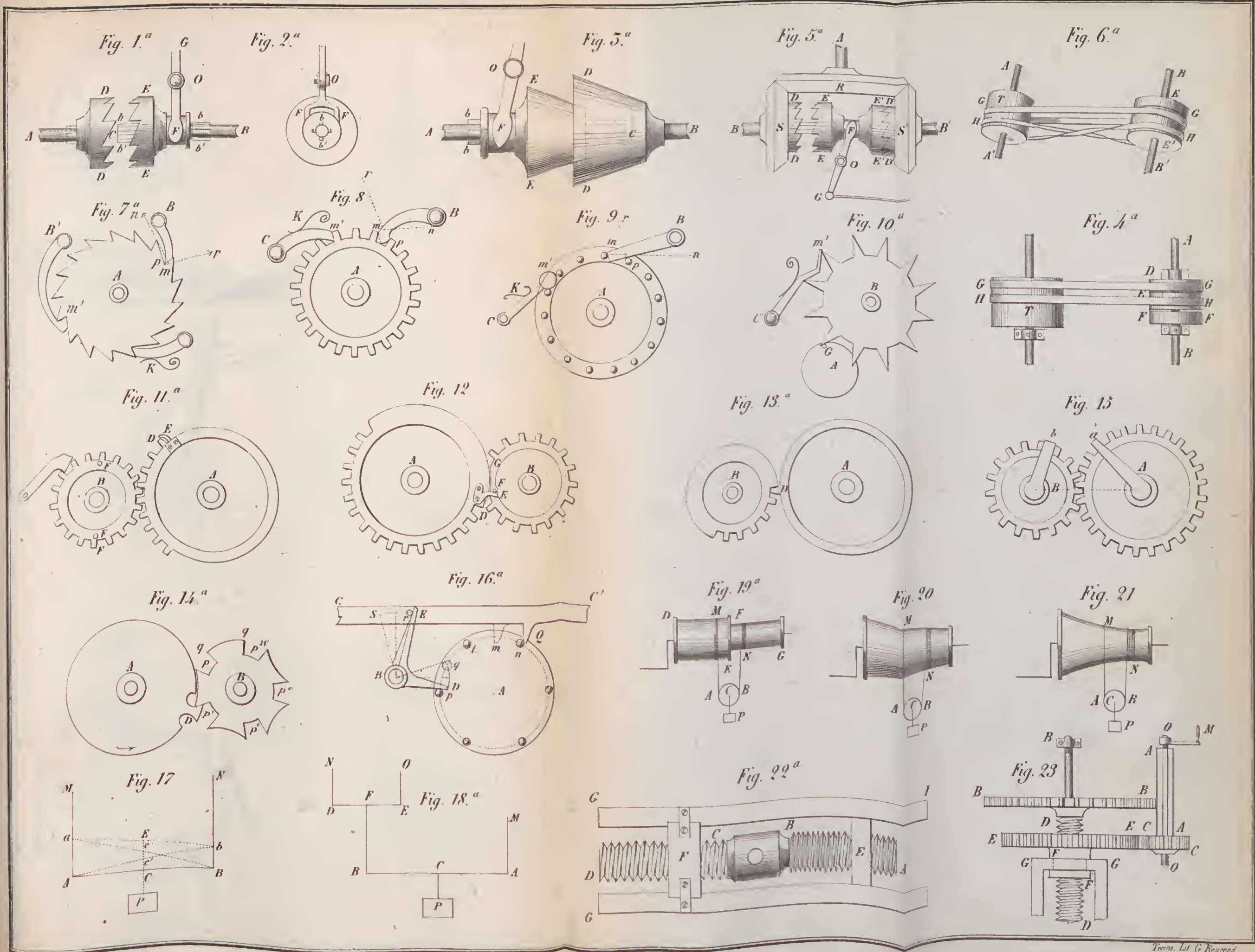





Torino Lit. C. Reycend




Lit G Reycend




Torino, Lit. G. Reycend

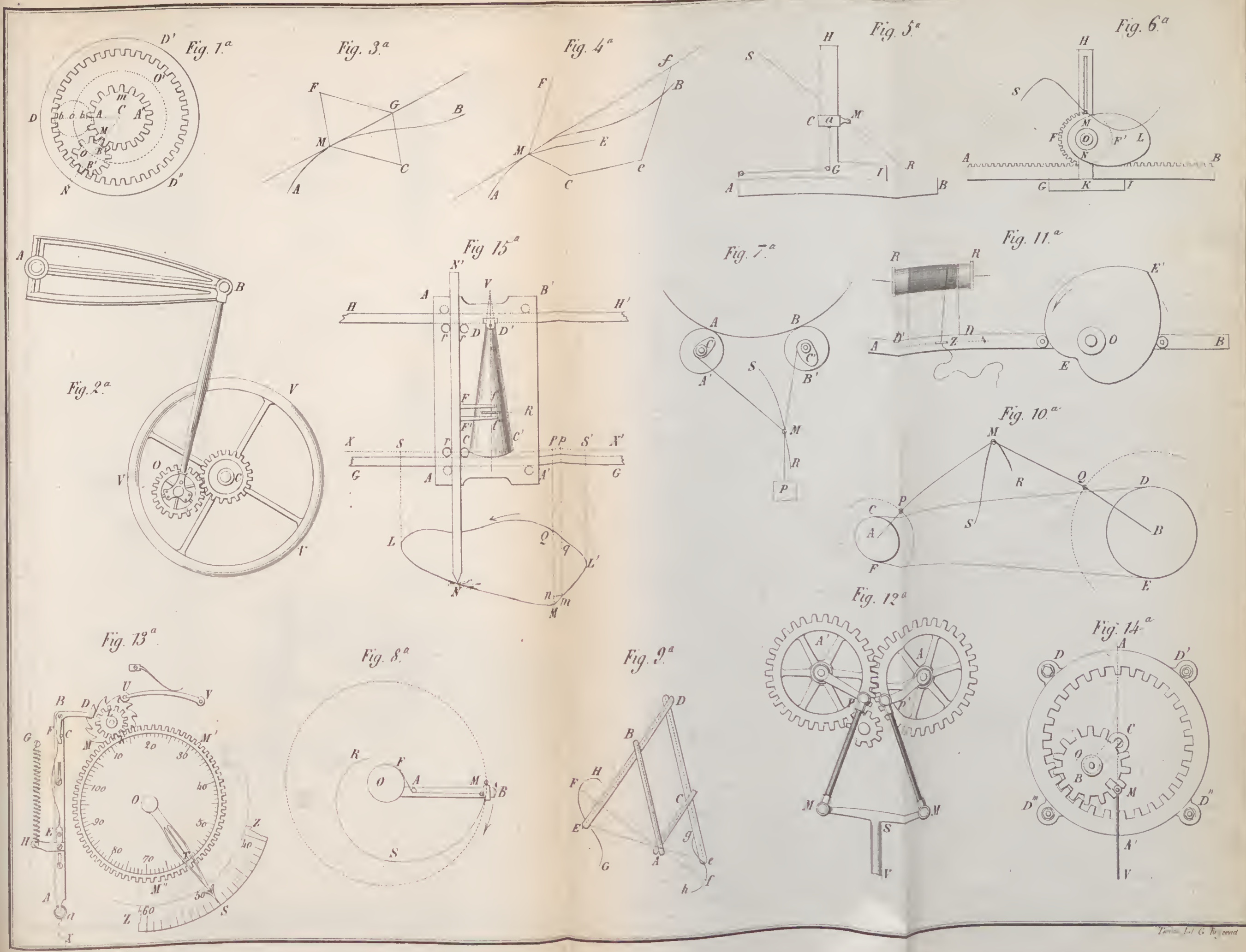


Fig. 1.a
Fig. 3.a
Fig. 4.a
Fig. 5.a
Fig. 6.a
Fig. 2.a
Fig 15.a
Fig. 7.a
Fig. 11.a
Fig. 10.a
Fig. 12.a
Fig. 13.a
Fig. 8.a
Fig. 9.a
Fig. 14.a

Fig. 1.a

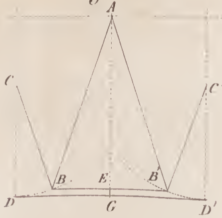



Fig. 2.a

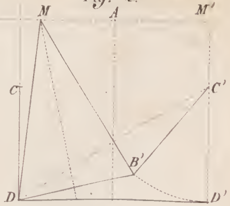



Fig. 4.a

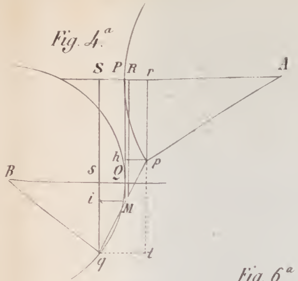



Fig. 7.a

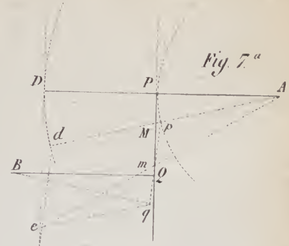



Fig. 6.a

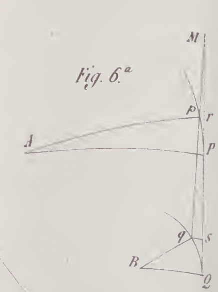



Fig. 5.a


Fig. 3.a

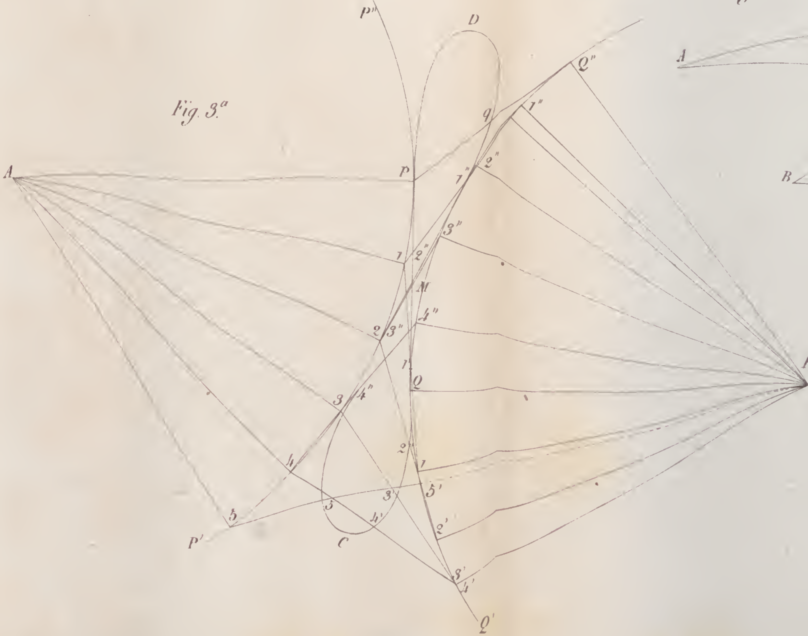
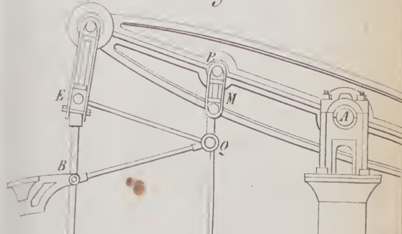



Fig 8.a




Torino, Lit. G. Rey[illegible]